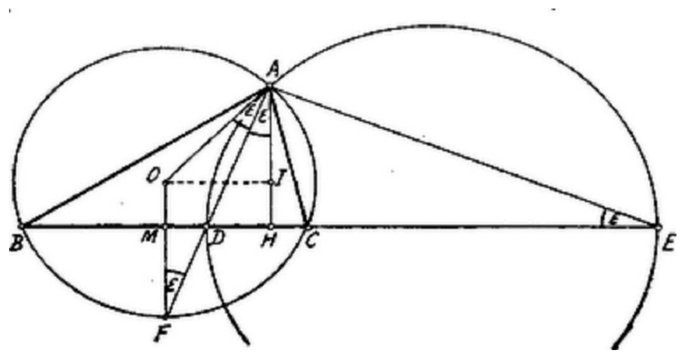
I. Megoldás. Az adatok közötti összefüggések vizsgálata céljából legyen $ABC\triangle$ a keresett háromszög, az α szög felezője $AD = l_\alpha$, az AD-re merőleges külső szögfelező AE; a BC oldalhoz tartozó Apollonius-kör átmérője $DE = 2k_\alpha$. A körülírt kör középpontja O, sugara $r = OA = OF$, ahol F a $\widehat{BC}$ ív felezőpontja, amelyen keresztülmegy az AD szögfelező.



A rövidség kedvéért legyen $AED\sphericalangle = \varepsilon$. Az $OFA\sphericalangle = \varepsilon$, mert szárai megfelelően merőlegesek az AED száraira. Mivel pedig $OF = OA$, az $OAF\sphericalangle = OFA\sphericalangle = \varepsilon$.

Ezek alapján a szerkesztést máris el tudjuk végezni. Kijelöljük az Appolloniuskör $DE = 2k_\alpha$, átmérőjét, megrajzoljuk ezen átmérőhöz tartozó kört és e körben felmérjük a $DA = l_\alpha$ hosszúságú húrt, hacsak $l_\alpha < 2k_\alpha$ Ezután AD-re az A csúcsnál rámérjük a $DAO\sphericalangle = DEA\sphericalangle = \varepsilon$ szöget és ezen szög másik szárára felmérjük az $AO = r$ távolságot. Az O pontból $OA = r$ sugárral szerkesztett kör a DE egyenest a B és C csúcsokban metszi, hacsak az O pont távolsága a DE egyenestől, t. i. $OM < r$.

Az így nyert $ABC\triangle$ valóban megfelel a követelményeknek. Ugyanis, a szerkesztésből következik: $OF = OA$, tehát $OFA\sphericalangle = OAF\sphericalangle = \varepsilon$. Azonban $FA \perp AE$; kell tehát, hogy $OF \perp BC$ legyen, azaz F felezi $\widehat{BC}$ ívet, AF ill. AD valóban felezi az α szöget és így DE a BC oldalhoz tartozó Apollonius-kör átmérője.

Már most vizsgáljuk meg közelebbről az $OM < r$ feltételt. Legyen $AH \perp BC$ és O vetülete az AH-n I; ekkor $OM = IH = AH - AI$.

Az ADE derékszögű háromszögű háromszögben

$$AH \cdot DE = AD \cdot AE \quad \text{azaz} \quad AH = \frac{AD \cdot AE}{DE} = \frac{l \cdot \sqrt{4k^2 - l^2}}{2k}$$

ahol egyelőre k és l indexét elhagytuk.

Az OAI derékszögű háromszögben $OAI\sphericalangle = 2\varepsilon$,[1] tehát

$$AI = OA\cos 2\varepsilon = r(1 - 2\sin^2\varepsilon) = r\left(1 - 2\frac{l^2}{4k^2}\right).$$

A szerkesztés lehetőségének feltétele:

$$\frac{l\sqrt{4k^2 - l^2}}{2k} - r\left(1 - \frac{2l^2}{4k^2}\right) < r \quad \text{vagy} \quad \frac{l\sqrt{4k^2 - l^2}}{2k} < \frac{2r}{4k^2}(4k^2 - l^2).$$

Egyszerűsítés és négyzetreemelés után

$$l^2 < \frac{r^2}{k^2}(4k^2 - l^2), \quad \text{ill.} \quad l_\alpha^2 < \frac{4k_\alpha^2 r^2}{k_\alpha^2 + r^2}.$$

Ha ezen feltétel ki van elégítve, akkor egyszersmind $l_\alpha^2 < 4k_\alpha^2$ azaz $l_\alpha < 2k_\alpha$.

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Kössük össze az Apollonius-kör ω középpontját a háromszög A csúcsával; ekkor $EA\omega\sphericalangle = \varepsilon$. Ha tehát az EAD derékszöget A körül ε szöggel elforgatjuk, akkor az ωAO szöget kapjuk, azaz $\omega AO\sphericalangle = 90°$. Ez annyit jelent, hogy a háromszög köré irt O kör és bármely oldalhoz tartozó Apollonius-kör merőlegesen metszik egymást. Ennek alapján a szerkesztés így végezhető: k_α és r sugarakkal oly köröket szerkesztünk, melyek merőlegesen metszik egymást. A k_α sugarú körben felmérjük a két kör egyik metszéspontjából, A-ból az $AD = l_\alpha$ hosszúságú húrt (úgy, hogy az O körön is belül essék). Meghúzzuk az ωD egyenest; ez az O kört a B és C pontokban metszi és $ABC\triangle$ a keresett háromszög.

[1] T. i. $OAF\sphericalangle = OFA\sphericalangle = \varepsilon$ és $FAI\sphericalangle = OFA\sphericalangle$, mert $OF \parallel AH$.

A szerkesztés lehetőségének feltétele, hogy l_α kisebb legyen a két kör közös húrjánál; ezen húr az $OA\omega$ derékszögű háromszög $O\omega$ átfogóhoz tartozó magasságának kétszerese. Az $OA\omega\triangle$ befogói k_α, r, átfogója $\sqrt{k_\alpha^2+r^2}$, az átfogóhoz tartozó magasság $\dfrac{k_\alpha r}{\sqrt{k_\alpha^2+r^2}}$. A szóbanforgó feltétel eszerint

$$l_\alpha < \frac{2k_\alpha r}{\sqrt{k_\alpha^2+r^2}}.$$

Weisz Alfréd (Bólyai g. VIII. o. Bp.)