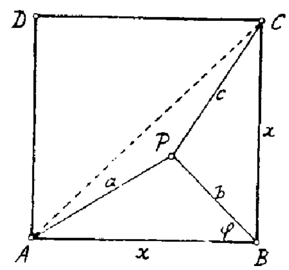

A és C a négyzet szemben fekvő csúcsai. A négyzet oldala legyen x és $ABP\sphericalangle = \varphi$. Ezekkel az $ABP\triangle$-ből

$$\cos\varphi = \frac{b^2+x^2-a^2}{2bx},$$

a $BCP\triangle$-ből

$$\cos(90^\circ-\varphi) = \sin\varphi = \frac{b^2+x^2-c^2}{2bx}.$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi =$$

$$= \left(\frac{b^2+x^2-a^2}{2bx}\right)^2 + \left(\frac{b^2+x^2-c^2}{2bx}\right)^2 = 1.$$

A tört eltávolítása, négyzetreemelés és rendezés után:

$$2x^4-2(c^2+a^2)x^2+(b^2-c^2)^2+(b^2-a^2)^2=0.$$

Innen

$$x^2 = \frac{(a^2+c^2)+\sqrt{(a^2+c^2)^2-2\left[(b^2-c^2)^2+(b^2-a^2)^2\right]}}{2}.$$

Feltéve, hogy a gyökök valósak, azaz

$$\Delta \equiv (a^2+c^2)^2-2\left[(b^2-c^2)^2+(b^2-a^2)^2\right] \geq 0,$$

x^2 mindkét értéke pozitív, mert szorzatuk és összegük is pozitív. Kérdés, hogy melyik felelhet meg a feladatnak?

A geometriai viszonyokat tekintve az $APC\triangle$ a P-nél tompaszögű,[1] tehát kell, hogy

$$AC^2 > \overline{AP}^2+\overline{CP}^2 \quad \text{azaz} \quad 2x^2 > a^2+c^2$$

legyen. Ebből következik, hogy a négyzet területe

$$x^2 = \frac{a^2+c^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)^2-2\left[(b^2-c^2)^2+(b^2-a^2)^2\right]}.$$

Vizsgáljuk már most, mi a feltétele annak, hogy x^2 valós legyen? Ha a Δ discrimináns kifejezésében kijelölt négyzetreemeléseket elvégezzük és összevonunk, akkor

$$\Delta \equiv 4a^2c^2-(2b^2-a^2-c^2)^2 \equiv (2ac+2b^2-a^2-c^2)(2ac-2b^2+a^2+c^2) \equiv$$
$$\equiv \left[2b^2-(a-c)^2\right]\left[(a+c)^2-2b^2\right].$$

$\Delta \geq 0$, ha mindkét tényezője egyenlő előjelű, azaz

1^0. ha

$$(a+c)^2 \geq 2b^2 \quad \text{és} \quad 2b^2 \geq (a-c)^2,$$

2^0. ha

$$(a+c)^2 \leq 2b^2 \quad \text{és} \quad 2b^2 \leq (a-c)^2.$$

Azonban a 2^0. eset, t. i.

$$(a+c)^2 \leq 2b^2 \leq (a-c)^2$$

nem lehetséges; mert $(a+c)^2$ nem lehet kisebb, mint $(a-c)^2$.

Csakis az 1^0. lehetséges, amidőn

$$(a+c)^2 > 2b^2 \geq (a-c)^2,$$

azaz ha az egyenlőségi jelnek megfelelő határeseteket nem tekintjük, a, c, $b\sqrt{2}$ *egy háromszög oldalai.*

Ha $a=b=c$, akkor $x^2=2a^2$, ill. $x=a\sqrt{2}$. Ez csak akkor állhat elő, ha P a négyzet középpontja.

[1] T. i. $APC\sphericalangle > ABC\sphericalangle = 90^\circ$.