Adataink szerint

$$f(2)=2f(1)+1=2f(1)+(-1)^2\ldots \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy

$$f(n)=2f(n-1)+(-1)^n\ldots \tag{2}$$

A feltétel szerint:

$$f(n+1)=2f(n-1)+f(n)\ldots \tag{3}$$

Ha azonban 2) igaz, akkor

$$2f(n-1)=f(n)-(-1)^n.$$

Ezt 3)-ba helyettesítjük:

$$f(n+1)=f(n)-(-1)^n+f(n)=2f(n)+(-1)^{n+1}\ldots \tag{4}$$

Ha tehát a (2) igaz, igaz (4) is. Minthogy a függvény értéke (1) szerint számítható ki $n=2$ esetében, ugyanezen törvényszerűség szerint számítható $f(3)$, $f(4)$ s. í.t. $f(n)$ is. Már most

$$\begin{aligned} f(n)&=2f(n-1)+(-1)^n=2^2f(n-2)+2(-1)^{n-1}+(-1)^n=\\ &=2^3f(n-3)+2^2(-1)^{n-2}-2(-1)^{n-1}+(-1)^n=\ldots=\\ &=2^{n-2}f(2)+2^{n-3}(-1)^3+2^{n-4}(-1)^4+\ldots+2^0(-1)^n=\\ &=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}(-1)^3+\ldots+2^{n-4}(-1)^4+\ldots+2^0(-1)^n. \end{aligned}$$

Ha n páratlan

$$\begin{aligned} f(n)&=2^{n-1}+(2^{n-2}-2^{n-3})+(2^{n-4}-2^{n-5})+\ldots+(2-1)=\\ &=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\ldots+2^4+2^2+1. \end{aligned}$$

Itt oly mértani haladvánnyal van dolgunk, amelynek első tagját 1-et tekintve, a hányados 2^2 és a tagok száma: $\dfrac{n-1}{2}+1$. Így a sor összege

$$f(n)=\frac{2^{2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}-1}{2^2-1}=\frac{2^{n+1}-1}{3}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}.$$

Ha pedig a páros, akkor

$$\begin{aligned} f(n)&=2^{n-1}+(2^{n-2}-2^{n-3})+(2^{n-4}-2^{n-5})+\ldots+(2^2-2)+1=\\ &=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}\ldots+2^3+2+1=\\ &=2\left[2^{n-2}+2^{n-4}+2^{n-6}\ldots+2^2+1\right]+1=\\ &=2\frac{2^{2\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}-1}{2^2-1}+1=2\frac{2^{2n}-1}{3}+1=\frac{2^{n+1}-2}{3}+1=\\ &=\frac{2^{n+1}+1}{3}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}. \end{aligned}$$

Eszerint, akár páros az n, akár páratlan

$$f(n)=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}.$$

Taksony György (ág. ev. g. VII. o. Bp.)