Egyenletünk aequivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\sqrt{x+1}=u, \qquad \sqrt{2x+1}=v, \qquad u-v=m,$$

ill.

(1)
$$x+1=u^2, \qquad 2x+1=v^2, \qquad u-v=m\ldots$$

ahol

$$u>0, \quad v>0.$$

v kiküszöbölésével:

(2)
$$v=u-m, \qquad x+1=u^2, \qquad 2x+1=(u-m)^2\ldots$$

vagy

(3)
$$v=u-m, \qquad x=u^2-1, \qquad f(u)\equiv u^2+2mu-m^2-1=0\ldots$$

ahol

(4)
$$u>0 \text{ és } \ u-m>0, \ \text{ azaz } \ u>m\ldots$$

Meg kell oldanunk tehát a (3) egyenletet u-ra nézve, a (4) feltételek tekintetbe vételével.

I. Legyen $m<0$. Ekkor, ha $u>0$ ki van elégítve, $u>m$. Ha azonban $m<0$, akkor a (3) egyenletnek mindig van két valós gyöke, ellenkező előjellel; ezek között a pozitív

$$u=-m+\sqrt{2m^2+1}$$

és így

$$x=u^2-1=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}.$$

II. $m=0$ esetben (3)-ból:

$$f(u)=u^2-1=0.$$

Minthogy

$$u>0, \quad u=1 \ \text{ és } \ x=u^2-1=0.$$

III. $m>0$. Most elegendő az $u>m$ feltételt kielégíteni, mert ekkor $u>0$. Minthogy a (3) egyenletnek valós gyökei vannak, ellenkező előjellel, csak az egyik: a pozitív felelhet meg, ha m-nél nagyobb.

Az $f(u)$ az u oly másodfokú függvénye, mely a zérus helyek között negatív. A pozitív zérus hely nagyobb m-nél, ha

$$f(m)<0, \quad \text{azaz} \ \ 2m^2-1<0, \quad \text{tehát} \ \ 0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Eszerint, ha m kielégíti ezen feltételt, akkor

$$u=-m+\sqrt{2m^2+1} \quad \text{és} \quad x=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}.$$

Összefoglalva: ha m változik $-\infty$-től $+\frac{\sqrt{2}}{2}$-ig, az egyenletnek egy megoldása van. Ha $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$, akkor $x=-\frac{1}{2}$. Ha pedig $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$, az egyenletnek nincs megoldása.

Freud Géza (Berzsenyi g. VI. o. Bp. V.)

Jegyzet: Vizsgáljuk az

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}$$

függvény változását. Valós értékeket csak akkor kapunk, ha $x\geq -\frac{1}{2}$, azaz a függvény értelmezési tartománya $x=-\frac{1}{2}$-től $x=+\infty$-ig terjed.

Ha $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=0$ helyen $y=0$; ha $x=+\infty$, $y=-\infty$.

A függvény az előbb kijelölt intervallumban folytonos és *állandóan fogy*, mert differenciálhányadosa

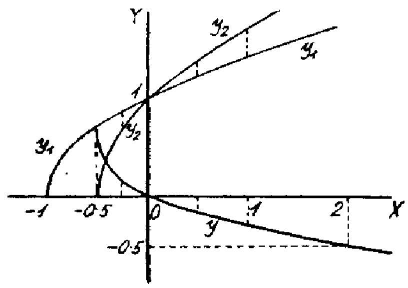
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}<0, \ \text{ ha csak } x\geq -\frac{1}{2}.$$

$$x=-\frac{1}{2} \ \text{ helyen } \ y'=-\infty.$$

Ábrázoljuk a következő két parabolának az X-tengely feletti részét:

$$a)\quad y_1=\sqrt{x+1},\qquad b)\quad y_2=\sqrt{2x+1}.$$

Az *a)* alatti csúcsa az $(x=-1,\ \ y=0)$ pont, a *b)* alattié $x=-\dfrac{1}{2},\ \ y=0$. A két parabolaág az $x=0,\ \ y=1$ pontban metszi egymást.



Ha az *a)* alatti parabola pontjaihoz tartozó ordinátákból kivonjuk a *b)* alatti parabola megfelelő pontjainak ordinátáit és ezen különbségeket az X-tengelyre merőlegesen felmérjük (a megfelelő x-helyen), az így nyert ordináták végpontjai az

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}$$

görbét adják.

Ezen görbe pontjaihoz tartozó ordináták $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-től 0-ig, azután 0-tól $-\infty$-ig változnak.

Ha az X-tengellyel $y=m$ párhuzamos egyenest húzunk, akkor ezen egyenes a görbét egy- és csakis egy pontban metszi, hacsak $0\le m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ill. $m<0$.