Legyen

$$x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}, \quad y = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

Ekkor

(1) $$x^3 + y^3 = (9+4\sqrt{5}) + (9-4\sqrt{5}) = 19\ldots$$

(2) $$xy = \sqrt[3]{81-(4\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{81-80} = 1\ldots$$

Már most

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = z^3 - 3z,$$

ha t.i. $x + y = z$ helyettesítéssel élünk és így (1) alapján

(3) $$z^3 - 3z - 18 = 0\ldots$$

Azonban

$$z^3 - 3z - 18 = (z-3)(z^2+3z+6),$$

tehát

(4) $$(z-3)(z^2+3z+6) = 0\ldots$$

A (4) szerint z-nek 3 értéke van: $z_1 = 3$; a másik kettő a

$$z^2 + 3z + 6 = 0$$

egyenlet gyökei; ezek azonban komplex számok, holott a két köbgyök valós szám. Eszerint z-nek csak a valós értéke: $z_1 = 3$ jöhet tekintetbe, úgy, hogy

$$z = x + y = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3.$$

Szilágyi Sándor és Vásárhelyi Nagy Sándor
(Kegyesrendi g. VII. o. Sátoraljaújhely.)

Jegyzet: Többen megállapították, hogy

$$9+4\sqrt{5} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3; \quad 9-4\sqrt{5} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Eszerint

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3.$$