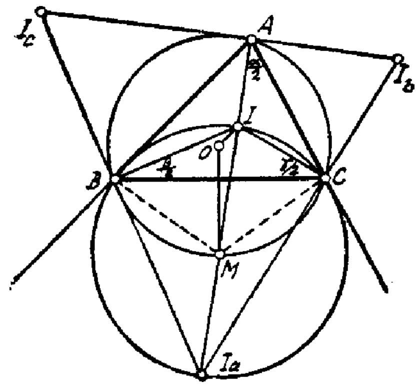
Legyen a keresett háromszög $ABC\triangle$.

Az I és I_a középpontok az A csúcsnál fekvő α szöget felező egyenesen feküsznek. I a belső szögfelezők közös pontja; I_a az α szöget, a β és γ mellékszögét felező egyenesek közös pontja, tehát $BI_a \perp BI$ és $CI_a \perp CI$, azaz B és C az II_a átmérőjű körön feküsznek. Legyen ezen kör középpontja M (az II_a távolság felezőpontja).



Kimutatjuk, hogy M *az* $ABC\triangle$ *köré írt körön fekszik.*

Ugyanis

$$BIC\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},[1]$$

és így

$$BI_aC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

minthogy IBI_aC húrnégyszög az II_a átmérőjű körben. Ezen körben a $BMC\sphericalangle$ ugyanazon ívhez tartozó középponti szög, amelyhez a $BI_aC\sphericalangle$ mint kerületi szög tartozik, tehát

$$BMC\sphericalangle = 2BI_aC\sphericalangle = 180^\circ - \alpha.$$

Ebből következik, hogy M az $ABC\triangle$ köré írt körön fekszik (felezi ezen kör $\widehat{BC}$ ívét), azaz$OM = OB = OC$.

Eszerint B és C az II_a átmérőhöz tartozó körnek és az O középpontú, OM sugarú körnek a közös pontjai. Az A csúcs az II_a egyenesnek és az utóbbi körnek (az M-en kívüli) második közös pontja. Ezek alapján a szerkesztés el is végezhető és az így nyert $ABC\triangle$ megfelel. Ugyanis: 1) az O és M középpontú körök közös húrja, BC, merőleges az OM centrálisra; tehát M az O kör BC ívének felezőpontja.

2) AII_a keresztülmegy az $ABC\triangle$ köré írt kör BC ívének M felezőpontján, tehát AII_a felezi az α szöget.

3) IC felezi a $BCA\sphericalangle = \gamma$ szöget. T. i. $MI = MC$ és így $MIC\sphericalangle = MCI\sphericalangle$. Másrészt[2]

$$MIC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + ACI\sphericalangle, \quad \text{azaz} \quad ACI\sphericalangle = MIC\sphericalangle - \frac{\alpha}{2}.$$
$$MCI\sphericalangle = MCB\sphericalangle + BCI\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + BCI\sphericalangle, \quad \text{azaz} \quad BCI\sphericalangle = MCI\sphericalangle - \frac{\alpha}{2};$$

ezekből következik $ACI\sphericalangle = BCI\sphericalangle$, azaz CI felezi a γ szöget. Eszerint I valóban a beírt kör, és mivel $CI_a \perp CI$, I_a a hozzáírt kör középpontja.

Vizsgáljuk még a szerkesztés lehetőségének feltételét! Az O, I, I_a pontok úgy helyezkednek el, hogy I a háromszög köré írt körön belül, I_a e körön kívül fekszik; azaz szükséges és elegendő, hogy

$$OI < OM < OI_a$$

legyen. Rögzítsük az I, I_a pontokat és így az M pontot is; húzzuk meg azt az egyenest, mely az IM távolságot merőlegesen felezi. Akkor az O pontnak a sík azon részében kell feküdnie, amelyben az I van. Ekkor valóban

$$OI < OM < OI_a,$$

és a két kör, t. i. az O és M középpontú körök tényleg metszik egymást.

Schreiber Béla (izr. g. VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. Ismeretes, hogy valamely háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői. Az $ABC\triangle$ a hozzátartozó $I_aI_bI_c\triangle$-re nézve talpponti háromszög, mert

$$I_aA \perp I_bI_c, \quad I_bB \perp I_cI_a, \quad I_cC \perp I_aI_b,$$

[1]L. ezen évf. 6. számában, az 1223. gyakorlatot! (1938/2 167. old. –a szerk.)

[2]L. az 1223. gyakorlat II. megoldását.

azaz I_aA, I_bB, I_cC az $I_aI_bI_c\triangle$ magasságvonalai és így I az $I_aI_bI_c\triangle$ magassági pontja. Az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja eszerint az $I_aI_bI_c\triangle$-re nézve Feuerbach-körének középpontja. Vagyis: az $I_aI_bI_c\triangle$-re nézve adva van egyik csúcsa, pl. I_a, magassági pontja, I, és Feuerbach-körének középpontja, O. Az IO egyenes az $I_aI_bI_c\triangle$ Euler-egyenese.

A Feuerbach-kör, mint már több ízben láttuk, keresztülmegy a magasságok azon szeletének felezőpontján, mely a csúcs és a magassági pont között van; a jelen esetben tehát az II_a távolság M felezőpontján.

Ezen tulajdonságok alapján úgy az $I_aI_bI_c\triangle$, mint az $ABC\triangle$ megszerkeszthető.