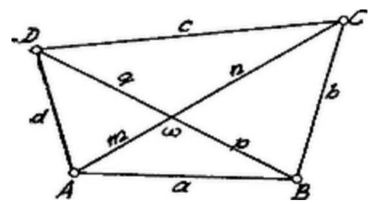
A négyszög oldalai legyenek a, b, c, d, átlói e és f és ezek szöge ω (ill. $180^\circ-\omega$). Húzzunk a négyszög csúcsain keresztül a megfelelő átlókkal párhuzamosakat; az így keletkező parallelogramma oldalai e és f, ezek szöge ω, területe $ef\sin\omega$. A négyszög területe ennek fele: $t=\frac{1}{2}ef\sin\omega$.



Az átlók szeletei legyenek ábránk szerint m és n, ill. p és q. A cosinustétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
a^2&=m^2+p^2-2mp\cos\omega\\
b^2&=n^2+p^2+2np\cos\omega\\
c^2&=n^2+q^2-2nq\cos\omega\\
d^2&=m^2+q^2+2mq\cos\omega
\end{aligned}$$

Innen:

$$\begin{aligned}
b^2+d^2-a^2-c^2&=2(mp+np+nq+mq)\cos\omega=\\
&=2(m+p)(p+q)\cos\omega=2ef\cos\omega.
\end{aligned}$$

Az ef szorzat értékét utóbbi egyenletből kifejezzük és t értékébe helyettesítjük. Így keletkezik:

$$t=\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)tg\omega,$$

[1] ahol ω az átlóknak azon szögét jelenti, amely az a és c oldalakkal fekszik szemben.

Donáth Géza (Áll. Szent László g. VIII. o. Bp. X.)

Jegyzet: Ha $\omega=90^\circ$, akkor $b^2+d^2-(a^2+c^2)=0$, ill. $b^2+d^2=a^2+c^2$. Ebben az esetben a t kifejezése nem ad határozott értéket. Képzeljünk egyszerűség kedvéért pl. egy rombust, megadott oldallal és a csúcsaiban csuklókkal ellátva. Az egyik oldalt rögzítjük, a többit forgatjuk; eközben az átlók mindig merőlegesek maradnak egymásra, a szembenfekvő oldalak négyzet összege mindig egyenlő egymással, azonban *a területe változó*. Jelölje a rombus oldalát a: területe 0 és a^2 között változik.

[1] Ha ω a tompaszög, akkor a vele szembenfekvő oldalak négyzetösszege: $a^2+c^2>b^2+d^2$.