I. Megoldás. Minthogy $\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$,

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Szentmiklósi László (Kossuth Lajos g. VIII. o. Pestszenterzsébet).

Jegyzet. Az $A=\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$ szorzat átalakítható így is:

$$A=\frac{1}{2}(\cos 3\alpha+\cos\alpha)\cos 3\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2 3\alpha+\cos\alpha\cos 3\alpha)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+\cos 2\alpha).$$

Ha $\alpha=\frac{2\pi}{7}$, akkor az 1372. feladat szerint

$$\cos 6\alpha+\cos 4\alpha+\cos 2\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha=\frac{1}{2}$$

és így

$$A=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

Fonó Péter (Verbőczy István g. VII. o. Bp. I.).

II. Megoldás. Ismeretes, hogy

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Az

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0\ldots \tag{4}$$

egyenlet gyökei: $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$

A (4) egyenlet ú. n. reciprok egyenlet, mely x^3-ével való osztás útján

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0\ldots \tag{5}$$

alakra hozható. Legyen most $x+\frac{1}{x}=y$,

tehát $\quad y^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$, azaz $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$,

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \quad \text{és így} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Helyettesítve ezeket (5)-be:

$$y^3-3y+y^2-2+y+1=0 \quad \text{vagy} \quad y^3+y^2-2y-1=0\ldots \tag{6}$$

A (6) egyenlet gyökei:

$$y=x+\frac{1}{x}=\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)^{1}=2\cos\frac{2k\pi}{7}$$

jelentéssel bírnak, ahol $k=1,\ 2,\ 3$ (vagy $k=4,\ 5,\ 6,$).

A (6) egyenlet gyökeinek szorzata:

$$2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{4\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{6\pi}{7}=1,\ \text{azaz}\ \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{8}.$$

Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály g. VIII. o. Debrecen).

---

[1] $\frac{1}{x}=x^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}=\cos\frac{2(7-k)\pi}{7}+i\sin\frac{2(7-k)\pi}{7}.$