Tetszőleges derékszögű koordinátarendszerben az A_i koordinátái (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots n$. Az M pont koordinátái legyenek (x, y). Az M pont azon tulajdonsággal bír, hogy reá nézve az

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \ldots \tag{1}$$

függvénynek minimuma van, tehát x és y kielégítik az $f'_x(x,y) = 0$ és $f'_y(x,y) = 0$ egyenleteket, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0 \ldots \quad \text{és} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0 \ldots \tag{3}$$

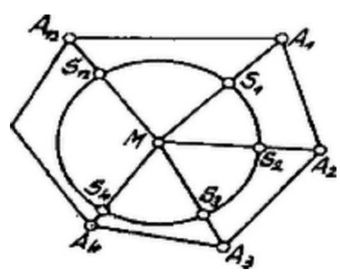
A (2) baloldalán álló egy-egy tag jelenti azon α_i szög cosinusát, melyet MA_i az X tengellyel alkot, a (3) baloldala ugyanezen szög sinusát, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = 0 \ldots \tag{2a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = 0 \ldots \tag{3a}$$

Az MA_i egyenesen M-től r távolságban felvett S_i koordinátái legyenek $x'_i, ' y_i$; nyilván

$$x'_i = x + r\cos\alpha_i, \qquad y'_i = y + r\sin\alpha_i \ldots \tag{4}$$



Az S_i pontokban elhelyezett egyenlő tömegek súlypontjának koordinátái legyenek ξ, η. Ekkor

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i = \frac{1}{n}\left(nx + r\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\right) = x,$$

mert $\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = 0$. Hasonlóan

$$\eta = \frac{1}{n}\sum y'_i = \frac{1}{n}\left(ny + r\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right) = y,$$

mert $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = 0$. Eszerint az S_i pontokban elhelyezett egyenlő tömegek súlypontja valóban az $M(x, y)$ pont!

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o., Bp. V.)

Jegyzet. Az M pont az S_i pontokat illetőleg is azon tulajdonsággal bír, hogy $\sum \overline{MS_i}$ minimum; ugyanis

$$\frac{x'_i - x}{r} = \cos\alpha_i \quad \text{és így} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x'_i - x}{\sqrt{(x'_i - x)^2 + (y'_i - y)^2}} = \sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = 0.$$

Hasonlóan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y'_i - y}{\sqrt{(x'_i - x)^2 + (y'_i - y)^2}} = \sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = 0,$$

azaz: ha egy húrsokszög csúcsainak éppen a körülírt kör középpontjától számított távolság összege a minimális, akkor ez a pont egyszersmind a sokszög csúcsaiba helyezett egyenlő tömegeknek a súlypontja.