Ha a kör A, B pontjaiban az érintők párhuzamosak, akkor AB a kör átmérője és AB felezőpontja, t. i. az origo a kör középpontja, melynek egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

A kör keresztülmegy a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ponton; tehát:

$$2 + 2 = r^2.$$

Eszerint a szóbanforgó kör:

$$x^2 + y^2 = 4 \ldots \tag{1}$$

A harmadfokú parabola egyenlete:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ldots \tag{2}$$

Az inflexiós pont abscissája, amint az 1341. feladatban láttuk: $-\dfrac{b}{3a}$. Most $-\dfrac{b}{3a} = 0$, tehát $b = 0$. Minthogy a görbe keresztülmegy az origón, a (2) egyenletet $(0,0)$ kielégíti és így $d = 0$. Eszerint a görbe egyenlete:

$$y = ax^3 + cx \quad \text{és} \quad y' = 3ax^2 + c \ldots \tag{3}$$

A görbe keresztülmegy a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ponton, tehát

$$\sqrt{2} = a \cdot 2\sqrt{2} + c\sqrt{2}, \quad \text{ill.} \quad 2a + c = 1 \ldots \tag{4}$$

A görbének és a körnek közös érintőjük van az A, B pontokban. A kör érintőjének irányhatározója az A pontban: -1, mert OA sugár iránytangense: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Ezért a (3) alatti $y' = -1$, ha $x = \sqrt{2}$,
vagyis

$$6a + c = -1 \ldots \tag{5}$$

(4) -ből és (5)-ből: $4a = -2$, $a = -\dfrac{1}{2}$ és így $c = 2$, úgy hogy

$$y = -\frac{1}{2}x^3 + 2x \ldots \tag{6}$$

görbével van dolgunk. Ezen görbének felső tetőpontja van az $x = +\dfrac{2}{3}\sqrt{3} \sim 1{,}16$, alsó tetőpontja az $x = -\dfrac{2}{3}\sqrt{3} \sim -1{,}16$ helyen.

Keressük már most az (1) kör és a (6) görbe közös pontjait. Meg kell oldanunk az (1) és (6) egyenletekből álló rendszert. Ebből y-t kiküszöböljük, ha a (6) alatti kifejezését (1)-be helyettesítjük:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x\right)^2 = 4, \quad \text{rendezve:} \quad x^6 - 8x^4 + 20x^2 - 16 = 0 \ldots \tag{7}$$

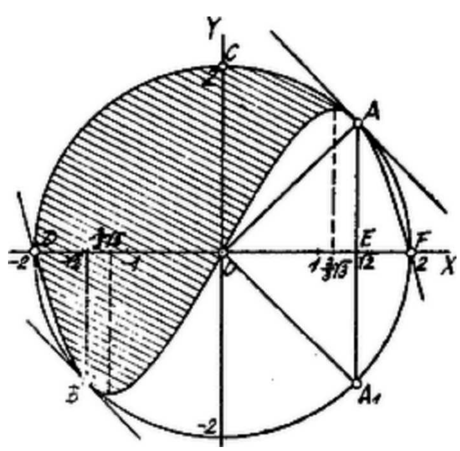
Ezen egyenletnek $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ kétszeres gyökei – az érintkezés miatt – tehát kell, hogy az egyenlet baloldala osztható legyen

$$(x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2 = (x^2 - 2)^2$$

szorzattal. Valóban

$$x^6 - 8x^4 + 20x^2 - 16 = (x^2 - 2)^2(x^2 - 4).$$

A parabola és a kör metszéspontjai az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet gyökeihez tartoznak: $x' = -2$, $x'' = 2$. Ezen pontok az abscissa-tengelyen feküsznek.



A két görbe által határolt terület nagyságát, $x_1 = -2$ és $x_2 = \sqrt{2}$ határok között a szimmetriából kifolyólag úgy kaphatjuk meg, hogy a kör területeiből kivonjuk a két görbének $x_2 = \sqrt{2}$ és $x'' = 2$ közötti íveik által bezárt sarló alakú idom területének kétszeresét és az így nyert különbség fele adja meg a keresett terület nagyságát.

Már most az AA_1 húr a körben oly szeletet – AFA_1 – határoz meg, mely egy 90°-ú körcikkből van lehasítva. A körcikk területe: $\dfrac{r^2\pi}{4} = \pi$. Az $AOA_1\triangle$ területe: $\dfrac{r^2}{2} = 2$. Így a körszelet területe: $t_1 = \pi - 2$ és ennek fele, az AEF vegyesvonalú idomé ($\widehat{AF}$ a kör íve): $\dfrac{\pi}{2} - 1$.

Ebből ki kell vonnunk az AE, EF és a parabola EF íve által határolt t_2 területet; minthogy $OE = \sqrt{2}$ és $OF = 2$,

$$t_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + x^2\right]_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{16}{8} + 4 + \frac{4}{8} - 2 = \frac{1}{2}.$$

A sarló alakú idom területe:

$$t_3 = \frac{1}{2}t_1 - t_2 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{2}.$$

A keresett terület: $$t = \frac{1}{2}(r^2\pi - 2t_3) = \frac{1}{2}\left(4\pi - 2\frac{\pi - 3}{2}\right) = \frac{3(\pi + 1)}{2}.$$

$$t = 6{,}2124 \ \text{területegység.}$$

Kieweg Ferenc (Kegyesrendi g. VIII. o., Bp.)