Az A koordinátái kielégítik a kör egyenletét. Ha $x=1$, akkor

$$4y^2-y-18=0;\ \text{innen}\ y=\frac{1\pm 17}{8}.\ \ \text{Mivel}\ \ y<0,\quad y=-2.$$

Hasonlóan a B pontra nézve, ha $x=2$,

$$4y^2-y-14=0;\quad \text{innen}\quad y=\frac{1\pm 15}{8}.\ \ \text{Mivel}\ \ y>0,\quad y=+2.$$

Eszerint az A koordinátái $(1,-2)$; a B ponté $(2,2)$.

A keresett harmadfokú parabola egyenlete:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d\dots$$

Itt az a, b, c, d együtthatók ismeretlenek, ezeket kell a feltételek alapján meghatároznunk; tehát 4 egyenletre van szükségünk. A parabola keresztülmegy az $A(1,-2)$ és $B(2,2)$ pontokon; ezek tehát kielégítik a parabola egyenletét, azaz:

(1) $$-2=a+b+c+d\dots$$

(2) $$+2=8a+4b+2c+d\dots$$

A parabolának és a körnek A-ban közös érintője van. A kör O_1 középpontjának koordinátái: $1,\frac{1}{8}$, azaz A abscissája megegyezik O_1 abscissájával; ebből következik, hogy a kör érintője A-ban párhuzamos az X-tengellyel, irányhatározója $=0$. A kör sugara $2\frac{1}{8}$.

A parabola irányhatározója: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Ha már most $x=1$, akkor $y'=0$, azaz

(3) $$3a+2b+c=0\dots$$

A (2) egyenlet tagjaiból kivonva a (2) és (3) megfelelő tagjait, keletkezik:

(3a) $$4a+b=4,\quad b=4(1-a)\ \ \text{és így}\ \ c=5a-8\dots$$

Már most határozzuk meg a parabola inflexiós érintőjét. Az inflexiós pontra nézve

$$y''=6ax+2b=0,\quad x_i=-\frac{b}{3a}$$

és így

$$y_i'=3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+2b\left(-\frac{b}{3a}\right)+c=\frac{b^2}{3a}-\frac{b^2}{3a}+c=c-\frac{b^2}{3a}.$$

Helyettesítve ide b és c (3a) alatti értékeit:

$$y_i'=5a-8-\frac{(4-4a)^2}{3a}=\frac{15a^2-24a-16+32a-16a^2}{3a}=\frac{-a^2+8a-16}{3a}$$

(3b) $$y_i'=-\frac{(a-4)^2}{3a}\dots$$

Az AB egyenes irányhatározója: $\frac{2+2}{1}=4$.

Az inflexiós érintő AB-hez való hajlásszögének tangense:

$$\frac{y_i'-4}{1+4y_i'}=\frac{7}{11}\quad \text{és innen}\quad y_i'=-3,\ \text{tehát}$$

(4) $$-\frac{(a-4)^2}{3a}=-3,\quad (a-4)^2=9a,\quad a^2-17a+16=0\dots$$

Eszerint a-ra két értéket kapunk:

$$a_1=1,\quad a_2=16.$$

I. Ha $a_1=1$, akkor $b_1=0$, $c_1=-3$ és pl. (1)-ből $d_1=0$.

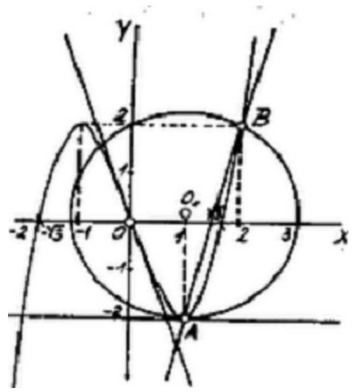
Az egyik parabola eszerint $y=x^3-3x$.

Most $\quad y'=3x^2-3\ \ \text{és}\ \ y''=6x$.

Az inflexiós pont az origó.

A függvény ábrázolása a köv. táblázat alapján végezhető:

x	$-\infty$	...	$-\sqrt{3}$		-1		0		$+1$		$\sqrt{3}$		2	...	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2 max.	$\searrow$	0 infl.	$\searrow$	-2 min.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

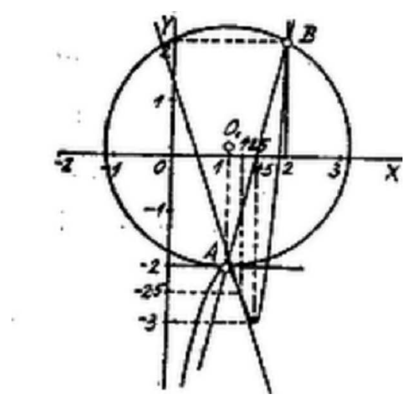


II. $a_2 = 16$ mellett $b_2 = -60$, $c_2 = 72$, $d_2 = -30$. Így

$$y = 16x^3 - 60x^2 + 72x - 30$$
$$y' = 48x^2 - 120x + 72, \quad y'' = 96x - 120.$$

A függvény ábrázolását a köv. táblázat segítségével végezhetjük:

x	$-\infty$		0		1		$1{,}25$		$1{,}5$		2	...	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-30	$\nearrow$	-2 max.	$\searrow$	$-2{,}5$ infl.	$\searrow$	-3 min.	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$



A függvénynek csak egy zérus helye van: 1,5 és 2 között.

Kádár Géza (Dobó István g. VIII. o., Eger)