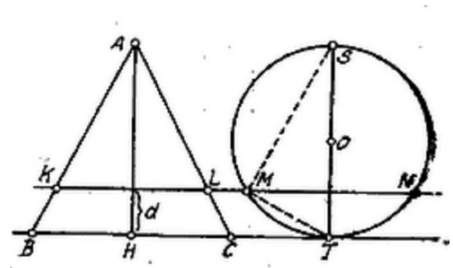
1^0. A körből kimetszett húr fele, $\frac{1}{2}MN$ mértani középarányosa a reá merőleges átmérő két szeletének. Az egyenlőszárú háromszögben $AKL\triangle \sim ABC$. Így a következőket írhatjuk:

(1) $$\frac{MN^2}{4} = d(2R-d)\ldots \quad \text{és}$$

(2) $$KL : BC = (2R-d) : AH\ldots$$

Minthogy $BC = AH$, (2)-ből $KL = 2R - d$.



A feladat követelménye pedig: $KL = MN$ tehát

(3) $$(2R-d)^2 = 4d(2R-d)\ldots$$

Ezen egyenlet egyik megoldása $2R - d = 0$, vagyis $d = 2R$; ekkor $KL = MN = 0$. Ha pedig $d \neq 2R$, akkor

$$2R - d = 4d \text{ ill. } d = \frac{2R}{5}.$$

2^0. A változó d jele legyen x. Ennek függvénye $y = KL - MN$, tehát, $2R = 1$ tekintetbevételével

(4) $$y = 1 - x - 2\sqrt{x(1-x)}\ldots$$

$x = 0$ mellett $y = 1$. (Ekkor $KL = BC = 1$, és $MN = 0$).

$x = 1$ helyen, amint 1^0. alatt láttuk: $y = 0$. Továbbá $y = 0$, ha $x = \frac{1}{5}$.

Az y függvény értelmezési tartománya, a négyzetgyök valós értékére való tekintettel: 0 és 1 között van, azaz $0 \leqq x \leqq 1$. Ezen közben y az x-nek folytonos és mivel a négyzetgyöknek csak pozitív értékét vesszük, egyértékű függvénye. Hogy változását vizsgáljuk, képezzük y differenciálhányadosát:

(5) $$y' = -1 - \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}\ldots$$

Ha $x = 0$, $y' = -\infty$. Ha x növekedik, $y' < 0$ mindaddig, amíg

(6) $$\frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}} = -1\ldots$$

lesz. Ezután $y' > 0$ és $x = 1$ helyen $+\infty$. Ebből következik, hogy a (6) egyenlet által meghatározott x helyen a függvénynek minimuma van. Minthogy a (6) egyenlet baloldalán a nevező pozitív, a tört előjele a számlálóéval egyezik meg, azaz $1 - 2x$ negatív, az egyenlet gyöke pedig: $x > \frac{1}{2}$ legyen.

Négyzetre emelve (6) mindkét oldalán:

$$\frac{(1-2x)^2}{x-x^2} = 1,$$

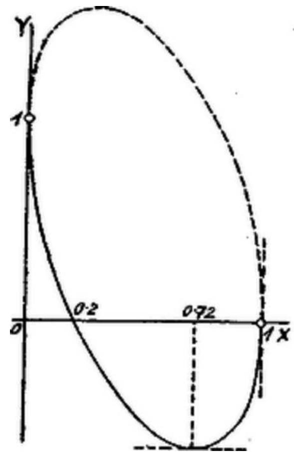
és rendezés után

(7) $$5x^2 - 5x + 1 = 0\ldots$$

Innen

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Ezek közül csak $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$, tehát az y függvénynek minimuma van az $x_2 \sim 0{,}72$ helyen.



A függvény változásának ábrázolására szolgáljon a következő táblázat:

x	0		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6		0,72		0,8	0,9		1
y	1	$\searrow$	0,3	0	$-0{,}22$	$-0{,}38$	$-0{,}5$	$-0{,}58$	$\searrow$	$-0{,}62$ min	$\nearrow$	$-0{,}6$	0,5	$\nearrow$	0
y'	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$

Komlós János (Gr. Széchenyi István gy. r. VIII. o., Pécs)

Kiegészítés. A függvényt ábrázoló görbe egy ellipszisnek a fele, amelynek AB az átmérője; t. i. A és B párhuzamos érintők érintési pontjai.

Ha a kör ST átmérőjének S végpontjából az $ABC\triangle$ AB és AC oldalával párhuzamosakat húzunk, akkor ezek meghatározzák a körön az M és N pontokat úgy, hogy $MN=KL$ lesz.