Kimutatjuk, hogy

$$i_1 = k, \quad \text{ha} \quad k = 2,\ 3,\ \dots\ (n-2),\ (n-1)$$

nem lehetséges, azaz az $1,\ 2,\ \dots\ n$ elemek olyan permutációira, amelyekben az első helyen $2,\ 3,\ \dots\ (n-2),\ (n-1)$ áll, az $1a$) és $1b$)-ből álló rendszer nem oldható meg.

Ha ugyanis $i_1 = k$ [ahol $k = 2,\ 3,\ \dots\ (n-2),\ (n-1)$], és a szóbanforgó rendszernek volna megoldása, akkor $1b$) szerint $|x_k| > |x_{k-j}|$ és $1a$) szerint $x_{k-j} > x_k$ [1] csak úgy lehetséges, ha $x_k < 0$; ekkor azonban $1a$) szerint

$$0 > x_k > x_{k+l}\ ^2 \quad \text{míg} \quad 1b) \text{ szerint } |x_k| > |x_{k+l}|,$$

tehát ellenmondásra jutunk.

Eszerint i_1 csak 1 vagy n lehet, más szóval az $1,\ 2,\ \dots\ n$ elemek *legkisebbike* vagy *legnagyobbika* (a természetes sorrend szerint). Már most nyilvánvaló, hogy ha i_1 helyébe az előbbiek egyikét helyeztük, akkor az

$$i_2,\ i_3,\ \dots\ i_n$$

is csak oly permutáció lehet, amelyben az i_2 helyén az i_1 helyére tett elemen kívül fennmaradó elemek közül is a *legkisebb* vagy a *legnagyobb* kerülhet. Ha tehát az

$$i_2,\ i_3,\ \dots\ i_n$$

helyeken álló és megfelelő permutációk száma p_{n-1}, és az

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \dots\ i_n$$

helyeken képzett megfelelő permutációk száma p_n, akkor

$$p_n = 2p_{n-1}.$$

Minthogy $p_2 = 2$, azaz az

$$x_1 > x_2 \quad \text{és} \quad |x_{i_1}| > |x_{i_2}|$$

rendszer az 1, 2 elemek 2 permutációjára megoldható,

$$p_3 = 2p_2 = 2^2, \quad p_4 = 2^3, \dots \quad p_n = 2^{n-1}.$$

Tehát az $1, 2, \dots n$ elemeknek 2^{n-1} számú olyan permutációja van, amelyre az $1a) - 1b)$ rendszer megoldható.

Pl. legyen $n = 5$. Az

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 \dots \tag{1a}$$

$$|x_{i_1}| > |x_{i_2}| > |x_{i_3}| > |x_{i_4}| > |x_{i_5}| \dots \tag{1b}$$

rendszernek az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek következő permutációinál van megoldása:

12345	15234	51234	54123
12354	15243	51243	54132
12534	15423	51423	54312
12543	15432	51432	54321

---

[1] $j = 1,\ 2,\ \dots\ (k-1)$.

[2] $l = 1,\ 2,\ \dots\ (n-k)$.