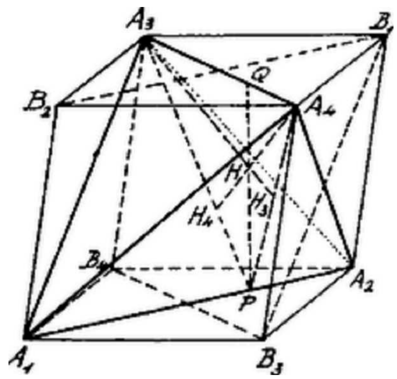
I. Megoldás. Az orthocentrikus tetraéder legyen $A_1A_2A_3A_4$; a köréje írt parallelepipedon élei egyenlők, határlapjai rombuszok. Ezen tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, pl. $A_1A_2 \perp A_3A_4$. (Az A_3A_4 él párhuzamos az $A_1B_2A_2B_1$ határlap B_3B_4 átlójával.)



A_3A_4 élen keresztül fektessünk síkot, mely merőleges A_1A_2-re és A_1A_2-t a P-ben metszi; P-ből állítsunk merőlegest A_3A_4-re, PQ-t. Ekkor PQ az A_1A_2 és A_3A_4 élek normáltranszverzálisa és az $A_3A_4P\triangle$-ben az A_3A_4 oldalhoz tartozó magasság.

Minthogy $A_1A_2 \perp [A_3A_4P]$, $A_1A_2 \perp A_3P$ és $A_1A_2 \perp A_4P$. Ez annyit jelent, hogy A_3P az $A_1A_2A_3\triangle$, A_4P az $A_1A_2A_4\triangle$ egyik magassági vonala.

Az orthocentrikus tetraéderben a tetraédermagasságok talppontjai a megfelelő határháromszög magassági pontjai. Eszerint az A_4 csúcsból kiinduló m_4 magassági vonal H_4 talppontja A_3P-n, az A_3 csúcsból kiinduló m_3-é, H_3, az A_4P-n fekszik. m_3 és m_4 az $A_3A_4P\triangle$-nek is magasságvonalai. Ezek azonban a tetraéder H magassági pontjában metszik egymást, tehát H az $A_3A_4P\triangle$-nek is magassági pontja: ezen keresztül kell mennie a háromszög harmadik magassági vonalának, t. i. PQ-nak is.

II. Megoldás. Az egyenlő élű parallelepipedon A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsai az A, a többi B_1, B_2, B_3, B_4 csúcsai a B tetraédert határozzák meg; mind a kettő orthocentrikus. Az A tetraéder H magassági pontja a B tetraéder köré írt gömb középpontja, tehát $HB_1 = HB_2 = HB_3 = HB_4$. Tekintsük már most pl. az A_1A_2 és A_3A_4 szembenfekvő (egymásra merőleges) élek transzverzálisát, PQ-t. Ez, amint előbb láttuk, benn van az A_3A_4 élen átfektetett Σ síkban, mely A_1A_2-re merőleges. Ezen Σ sík merőleges a B_1B_2 egyenesre és a B_1B_2-t merőlegesen felező A_3A_4-n megy keresztül, tehát mértani helye mindazon pontoknak, amelyek B_1-től és B_2-től egyenlő távolságban vannak. De PQ benne van azon Σ' síkban is, melyet az A_1A_2 élen átfektetünk A_3A_4-re merőlegesen; Σ' mértani helye eszerint azon pontoknak, amelyek B_3-tól és B_4-től vannak egyenlő távolságban. Tehát PQ bármely pontja egyenlő távolságban van egyrészt B_1- és B_2-, másrészt a B_3- és B_4 csúcsoktól. Most még azt kell kimutatnunk, hogy PQ-nak van oly pontja, mely valamennyi B csúcstól egyenlő távolságban van.

Fektessünk az A_2A_4 élen keresztül síkot, mely A_1A_3-ra merőleges. Ezen sík, Σ'', mértani helye mindazon pontoknak, melyek B_1-től és B_3-tól egyenlő távolságban vannak; Σ'' a PQ-t egy oly H pontban metszi, melyre nézve $HB_1 = HB_3$. Azonban az előbbiek szerint $HB_2 = HB_1$ és $HB_4 = HB_3$ és így

$$HB_1 = HB_2 = HB_3 = HB_4.$$

Eszerint H a B tetraéder köré írt gömb középpontja, ill. az A tetraéder magassági pontja, amelyen az A tetraéder szembenfekvő éleihez tartozó transzverzálisok bármelyike keresztül megy.