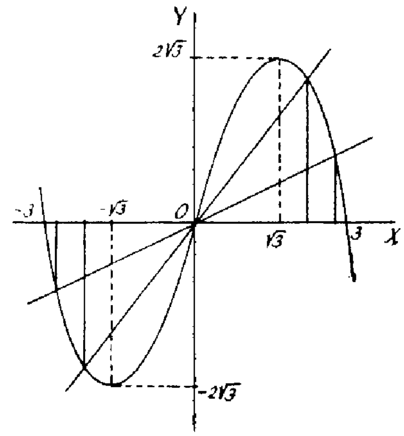
Vizsgáljuk első sorban a görbe alakját. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ első differenciálhányadosa: $y' = -x^2 + 3$, a második $y'' = -2x$. A görbének az $x = 0$, $y = 0$ helyen inflexiós pontja van. A görbe az inflexiós pontjára, ill az origóra nézve szimmetrikus. Ha $x = -\infty$, $y = +\infty$; ha $x = +\infty$, $y = -\infty$. A függvény $+\infty$-től csökken egy minimumig ($x = -\sqrt{3}$ helyen), azután növekszik, az inflexiós ponton keresztül $x = +\sqrt{3}$ helyig; itt maximuma van. Ezután csökken $-\infty$-ig. Az $x = 0$ helyen az érintő iránytangense: $y'_{x=0} = 3$.



Az inflexiós ponton, tehát az origón átmenő egyenes egyenlete $y = mx$. Ez a görbét – az inflexiós ponton kívül – még oly pontokban metszi, amelyekre nézve

$$mx = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \quad \text{vagy} \quad x^3 + (3m - 9)x = 0.$$

Ezen egyenletet kielégítik $x_1 = 0$ [1] és az

$$x^2 + (3m - 9) = 0$$

egyenlet gyökei: $x_{2,3} = \pm\sqrt{9 - 3m}$.

Ezen két gyök az origóra nézve szimmetrikus pontokat határoz meg a görbén; feladatunk szempontjából elegendő, ha csak az egyikre – a pozitívra – vagyunk figyelemmel. Ugyanis e két ponthoz tartozó derékszögű háromszögek egybevágók.

Az $x_2 = \sqrt{9 - 3m}$ abscissához tartozó pont ordinátája: $y_2 = m\sqrt{9 - 3m}$. A szóbanforgó két derékszögű háromszög területének összege: $T = 2\,\frac{x_2 y_2}{2} = m(9 - 3m)$.

Nyilvánvaló, hogy itt m-nek csak nem negatív értékei jöhetnek tekintetbe, mindaddig, amíg $\sqrt{9 - 3m}$ valós, azaz $0 < m < 3$. Az $m = 3$ érték az inflexiós pontban húzott érintő irányhatározója: ez azon határ, ameddig az origo körül forgatva az egyenest (az $m = 0$ helyzetből kiindulva), az egyenesnek és a görbének van még közös pontja (az origón kívül).

T az m-nek oly másodfokú függvénye, mely a megadott intervallumban 0-tól növekszik egy maximumig, azután csökken zérusig. T maximuma akkor áll elő, ha $m = \frac{9}{6} = 1{,}5$. Ekkor $T_{\max} = 6{,}75$. Az $m = 1{,}5$ értékhez $x = \sqrt{9 - 4{,}5} = 1{,}5\sqrt{2}$ abscissa tartozik. (A görbének azon pontja, melyre nézve $x = 1{,}5\sqrt{2}$, $y = 2{,}25\sqrt{2}$.)

Czipott Zoltán (Kegyesrendi g. VII. o. Szeged.)

---
[1] Vagyis az inflexiós pont.