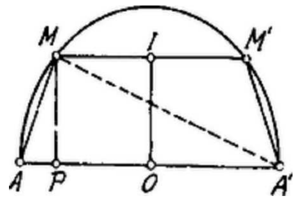
Ha MM' felezőpontja I, akkor $MM' = 2MI = 2OP = 2x$. Az AMA' derékszögű háromszögből

$$\overline{AM}^2 = \overline{AA'} \cdot \overline{AP} = \overline{AA'}(OA - OP) = 2r(r - x).$$



Minthogy $M'A' = AM$, feltételi egyenletünk

$$2\sqrt{2r(2r - x)} + 2x = 2l \quad \text{ill.} \quad \sqrt{2r(r - x)} = l - x$$

alakban írható. Ebből láthatjuk, hogy $x \le l$ és $x < r$ tartozik lenni és jelentésénél fogva pozitív.

Négyzetre emelve: $2r(r - x) = (l - x)^2$

ill. $f(x) \equiv x^2 - 2(l - r)x + l^2 - 2r^2 = 0.$

$x = l - r \pm \sqrt{r(3r - 2l)}.$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett van elfogadható megoldás és hány van?

A gyökök valósak, ha $l \le \dfrac{3r}{2}$.

$f(r) = (l - r)^2 > 0$. Ebből következik, hogy r mindig a gyökökön kívül fekszik, még pedig nagyobb a gyököknél, mert nagyobb a gyökök félösszegénél, $(l - r)$-nél. Valóban

$$r > l - r, \quad \text{mert} \quad 2r > l, \ \text{hacsak } l \le \frac{3r}{2}.$$

$f(l) = 2r(l - r) > 0$, ha $l > r$. Ekkor l nagyobb a gyököknél, mert $l > l - r$, $r > 0$. Ha $l < r$, akkor $f(l) < 0$, tehát l a gyökök között van. Utóbbi esetben az egyik gyök negatív, a pozitív gyök pedig l-nél nagyobb: egyik sem felelhet meg.

$f(0) = l^2 - 2r^2 > 0$, ha $l > r\sqrt{2}$. Ezen értékek mellett úgy a gyökök szorzata, mint a gyökök összege pozitív, tehát mindkét gyök pozitív és mindegyik kisebb l-nél ($l > r$!). Ha $l < r\sqrt{2}$, akkor az egyik gyök negatív; a másik pozitív és kisebb l-nél mindaddig, amíg $l > r$.

Eszerint,

$$\begin{aligned} &\text{ha } r\sqrt{2} < l < \frac{3r}{2}, \ \text{két megoldás;} \\ &\text{ha } r < l < r\sqrt{2}, \ \text{egy megoldás van;} \\ &\text{ha } l < r, \ \text{nincs megoldás.} \end{aligned}$$

Nézzük a határeseteket. Ha $l = r$, akkor $x_1 = x_2 = r$; a trapéz az AA' átmérőbe zsugorodik.

$$l = r\sqrt{2} \quad \text{esetben} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2r(\sqrt{2} - 1) \sim 0{,}83r.$$

$l = \dfrac{3r}{2}$ mellett $x_1 = x_2 = \dfrac{r}{2}$. Ekkor a trapéz a szabályos hatszög fele!
$(AM = MM' = M'A' = r)$.

Halász Iván (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)