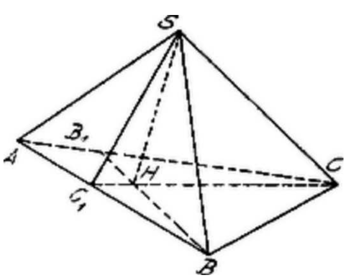
a) Induljunk ki abból az esetből, amidőn a tetraéder S csúcsában három, páronként egymásra merőleges él fut össze. Ilyenkor S a tetraéder magassági pontja, az S csúccsal szembenfekvő lapon $ABC\triangle$ ***hegyesszögű háromszög*** tartozik lenni, [1] az S csúcsból az ABC lapra bocsátott magasság talppontja az $ABC\triangle$ magassági pontja. Az $ABC\triangle$ területének négyzete pedig egyenlő az oldallapok (SAB, SBC, SCA) területének négyzetösszegével. [2]

Ha az $ABC\triangle$ magassági pontja H, az $ABC\triangle$ magasságainak talppontjai (a háromszög megfelelő oldalain) A_1, B_1, C_1, akkor, mivel SAA_1, SBB_1, SCC_1 az S-nél derékszögű háromszögek,

$$\overline{SH}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HA_1} = \overline{BH}\cdot\overline{HB_1} = \overline{CH}\cdot\overline{HC_1}$$

és

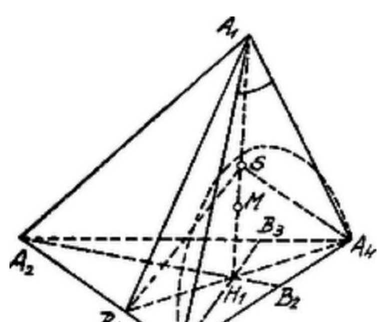
$$\overline{SA_1}^2 = \overline{A_1A}\cdot\overline{A_1H},\quad \overline{SB_1}^2 = \overline{B_1B}\cdot\overline{B_1H}$$
$$\overline{SC_1}^2 = \overline{C_1C}\cdot\overline{C_1H}.$$



Megjegyezzük még, hogy az S csúcs az ABC síkra, a H pontban állított merőlegesnek és az $ABC\triangle$ bármely oldalához, mint átmérőhöz tartozó gömb metszéspontja. (L. a 466. feladatban!)

b) Legyen már most, az $A_1A_2A_3A_4$ oly orthocentrikus tetraéder, melynek minden határlapja hegyesszögű háromszög, tehát mindegyik testszöglete hegyes.

Az orthocentrikus tetraéderben mindegyik magasság talppontja a szembenfekvő határlapon, az illető határlap ill. határháromszög magassági pontja – hiszen az ilyen tetraéder szembenfekvő élei egymásra merőlegesek. (L. egyébként a II. évf. 179. oldalán a 110. feladatot!) Hegyesszögű háromszögben a magassági pont a háromszögön belül van; kell tehát, hogy a tetraéder magassági pontja a tetraéderen belül legyen.



Tekintsük pl. a tetraéder A_1H_1 magasságát, ahol H_1 az $A_2A_3A_4\triangle$ magassági pontja. Már most pl. az A_3A_4 élhez, mint átmérőhöz tartozó gömb az $A_1A_3A_4$ lapot egy legnagyobb körben metszi úgy, hogy A_1 ezen körön, ill. a gömbön kívül fekszik; [3] a gömb az A_1H_1 magasságot oly S pontban metszi, mely A_1 és H_1 között fekszik és az $SA_2A_3\ A_4$ tetraéder az *a)* alatti tulajdonságokkal bír, úgy hogy

$$\overline{A_1H_1^2} > \overline{SH_1^2} = \overline{A_iH_1}\cdot\overline{H_1B_i} \quad \text{és} \quad \overline{A_1B_i^2} > SB_i^2 = \overline{B_iA_i}\cdot\overline{B_iH_1}$$

[1] L. V. évfolyamunk 241. oldalán a 466. feladatban (1929/4. 241. old. – a szerk.)

[2] L. II. évfolyamunk 142. oldalán a 91. feladatban (1926/1. 142. old. – a szerk.).

[3] Ugyanis $A_3A_1A_4\sphericalangle$ hegyesszög! A tetraéder M magassági pontja S és H között fekszik. Ugyanis az $A_1A_3A_4\triangle$ magassági pontja, H_2, az A_3A_4 átmérő félkörön, ill. gömbön belül fekszik; ezen belül fekszik SH_1 is. (S a gömbön!) Így a tetraéder A_2H_2 magassága az A_1H_1-et csak S és H_1 között metszheti (az M pontban).

ahol B_i az $A_2A_3A_1\triangle$ A_i csúcsából kiinduló magasság talppontja ($i = 2, 3, 4$).
Eszerint

$$\begin{array}{lll} \overline{A_1B_2^2} > \overline{B_2A_2}\cdot\overline{B_2H_1} & \text{vagy} & \left(\frac{1}{2}A_1B_2\cdot A_3A_4\right)^2 > \left(\frac{1}{2}A_3A_4\cdot B_2A_2\right)\left(\frac{1}{2}A_3A_4\cdot B_2H_1\right) \\ \overline{A_1B_3^2} > \overline{B_3A_3}\cdot\overline{B_3H_1} & ,, & \left(\frac{1}{2}A_1B_3\cdot A_2A_4\right)^2 > \left(\frac{1}{2}A_2A_4\cdot B_3H_3\right)\left(\frac{1}{2}A_2A_4\cdot B_3H_1\right) \\ \overline{A_1B_4^2} > \overline{B_4A_4}\cdot\overline{B_4H_1} & ,, & \left(\frac{1}{2}A_1B_4\cdot A_2A_3\right)^2 > \left(\frac{1}{2}A_2A_3\cdot B_4A_4\right)\left(\frac{1}{2}A_2A_3\cdot B_4H_1\right) \end{array}$$

Az utóbbi egyenlőtlenségek azt fejezik, hogy mindegyik oldallap területe nagyobb, mint az alaplap és az oldallap (az alaplapon való) vetületének mértani középarányosa, [4] azaz

$$t^2_{A_1A_3A_4} > t_{A_2A_3A_4}t_{A_3A_4H_1}, \quad t^2_{A_1A_2A_4} > t_{A_2A_3A_4}\cdot t_{A_2A_4H_1},$$
$$t^2_{A_1A_2A_3} > t_{A_2A_3A_4}\cdot t_{A_2A_3H_1}.$$

Összeadva ezen egyenlőtlenségek megfelelő oldalait

$$t^2_{A_1A_3A_4} + t^2_{A_1A_2A_4} + t^2_{A_1A_2A_3} > t_{A_2A_3A_4}\left(t_{A_3A_4H_1} + t_{A_2A_4H_1} + t_{A_2A_3H_1}\right).$$

A jobboldali zárójeles összeg azonban az $A_2A_3A_4\triangle$ területét jelenti és így

$$t^2_{A_2A_3A_4} < t^2_{A_1A_3A_4} + t^2_{A_1A_2A_4} + t^2_{A_1A_2A_3}.$$

Kimutattuk tehát, hogy ha az orthocentrikus tetraéder valamelyik testszöglete hegyes, akkor a szembenfekvő határlap területének négyzete kisebb, mint a többi lapokénak négyzetösszege!

c) Tegyük fel már most, hogy az $A_1A_2A_3A_4$ orthocentrikus tetraéder olyan, hogy az A_1 szöglet tompaszögű. Ekkor A_1-nek az alapélek bármelyikéhez, mint átmérőhöz tartozó gömb belsejében kell feküdnie [5] és ekkor $A_1H_1 < SH_1$ (ahol S ugyanazt a pontot jelenti, mint *b)* alatt). A *b)* alatti egyenlőtlenségek értelme megváltozik, úgy hogy ezen esetben

$$t^2_{A_2A_3A_4} > t^2_{A_1A_3A_4} + t^2_{A_1A_2A_4} + t^2_{A_1A_2A_3},$$

azaz, ha a tetraéder egyik szöglete tompa, akkor az ezzel szembenfekvő határlap (területének) négyzete nagyobb, mint az oldallapok területének négyzetösszege.

Az ilyen tetraédernél a tetraéder magassági pontja a tetraéderen kívül esik. Ugyanis az A_i ($i = 2, 3, 4$) csúcsból a szemközti határlapra bocsátott tetraédermagasság talppontja az illető határlap magassági pontja. Mivel pedig az A_i ($i = 2, 3, 4$) csúccsal szembenfekvő határlap A_1-nél tompaszögű, ennek magassági pontja a háromszögön, ill. a tetraéderen kívül esik és így az A_i ($i = 2, 3, 4$) csúcsokból kiinduló tetraéder-magasságok, ill. ezek metszőpontja, a tetraéder magassági pontja is a tetraéderen kívül esik.

Ezek alapján *kell*, hagy a feladatban foglalt tétel igaz legyen. Mert, ha mindegyik határlap (területének) négyzete kisebb a többi lapok négyzetösszegénél, akkor nem lehet, hogy az egyik szöglet derékszögű vagy tompaszögű legyen: az *a)* ill. *c)* eset állana elő a területek négyzetét illetőleg.

Ha pedig egyik határlap négyzete nagyobb a többiek négyzetösszegénél, akkor kell, hogy ezen határlappal szemben tompaszögű testszöglet legyen; mert ha nem az, akkor az *a)* vagy *b)* eset állana elő, a területek négyzetét illetőleg.

---

[4] A $>$ jel helyett $=$ áll elő, ha A_1-nél mindegyik élszög derékszög!

[5] Ha $A_iA_1A_k\sphericalangle$ ($i \neq k \pm 1$) tompaszög, akkor A_1 az A_iA_k átmérőjű körön belül fekszik!