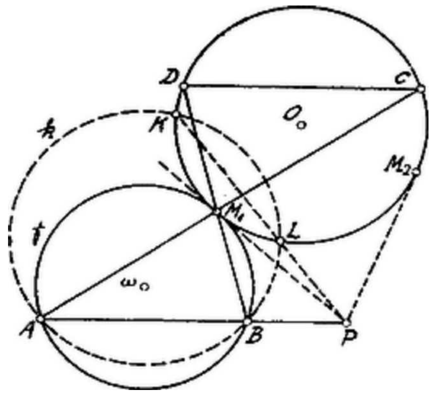
I. Megoldás. Tegyük fel, hogy feladatunkat megoldottuk: M pont megfelel a feladat követelményének, úgy, hogy $CD \parallel AB$. Tekintsük már most az $AMB\triangle$ köré írt γ kört. Minthogy $CD \parallel AB$, nyilván $\frac{MA}{MC}=\frac{MB}{MD}$, azaz a két kör az M pontra nézve hasonló helyzetű; azonban M az O és γ körök közös pontja csak akkor lehet hasonlósági centrum, ha érintkezési pontja a két körnek. Szerkesztenünk kell tehát oly γ kört, mely keresztülmegy az A és B pontokon és az O kört érinti. Ilyen kör kettő van, hacsak A és B az O körre nézve a sík ugyanazon részében vannak.



Szerkesszünk egy k kört, mely keresztül megy az A, B pontokon és az O kört metszi, a KL pontokban. Ekkor a KL egyenes, a k és O körök hatványvonala, AB-t oly P pontban metszi, melynek hatványa a k és O körökre nézve egyenlő, továbbá a γ és k körökre nézve is egyenlő. Eszerint a P hatványa a γ és O körökre nézve is ugyanakkora: kell tehát, hogy γ és O hatványvonala, azaz közös érintőjük a szilárd P ponton menjen keresztül.

A P pontot az előbbiek szerint meghatározzuk és P-ből O-hoz érintőket húzunk, M_1 és M_2 érintési pontokkal: ezek lesznek a keresett M pontok.

E szerkesztés nem végezhető, ha pl. A a körön kívül, B a körön belül van. Ugyanis, ha a kör tetszőleges M pontját összekötjük A-val és B-vel, C és M az AB egyenes ugyanazon oldalán, azonban D és M az AB ellenkező oldalán feküsznek és így CD metszeni fogja AB-t.

Klein József (izr. g. VII. o. Debrecen).

II. Megoldás. Ha M a feladat követelményének megfelel, úgy hogy $AB \parallel CD$, akkor

$$\frac{AC}{AM}=\frac{BD}{BM} \quad \text{vagy} \quad \frac{AC\cdot AM}{\overline{AM}^2}=\frac{BD\cdot BM}{\overline{BM}^2}.$$

Azonban $\overline{AC}\cdot\overline{AM}=\alpha^2$ az A, $\overline{BD}\cdot\overline{BM}=\beta^2$ a B pontnak az O körre vonatkozó hatványa; ezek tehát ismereteseknek tekinthetők és megegyező előjelűek is tartoznak lenni. [1] Eszerint

$$\frac{\overline{BM}^2}{\overline{AM}^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \quad \frac{BM}{AM}=\frac{\alpha}{\beta},$$

azaz az M pontra nézve az A és B pontoktól való távolságok viszonya állandó és így az M pont mértani helye az A és B pontokhoz tartozó, $\frac{\alpha}{\beta}$ értéknek megfelelő Apollonius-féle kör, mely O-t az M_1 és M_2 pontokban metszi.

[1] Vagy mindkettő a körön belül, vagy a körön kívül!