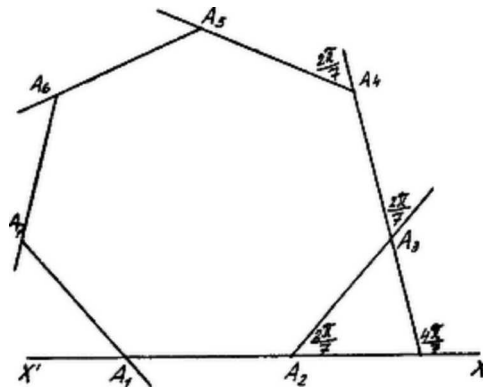


I. Megoldás. Ha egy zárt sokszög oldalait, ugyanazon forgás irányban haladva, egy egyenesre vetítjük, a vetületek algebrai összege zérus.

Alkalmazzuk ezen tételt a szabályos hétszögre úgy, hogy az összes oldalakat az egyik oldalát tartó $X'X$ egyenesre vetítjük, a pozitív forgás irányában haladva.



A szabályos hétszög mindegyik szöge $\pi - \frac{2\pi}{7}$.

Az első oldal és $X'X$ egyenes hajlásszöge 0; vetülete $a \cos 0$. A következő oldal hajlásszöge $X'X$ -hez $\frac{2\pi}{7}$; vetülete $a \cos \frac{2\pi}{7}$. Minden következő oldal az előbbiből $\frac{2\pi}{7}$ mérőszámnak megfelelő szöggel fordul el, az $X'X$ -hez való hajlásszög oldalról-oldalra haladva $\frac{2\pi}{7}$ -vel növekszik. Eszerint a vetületek összege:

$$(1) \quad x = a \left(\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} \right) = 0 \dots$$

Azonban

$$\cos \frac{12\pi}{7} = \cos \left(2\pi - \frac{12\pi}{7} \right) = \cos \frac{2\pi}{7}.$$

Hasonlóan

$$\cos \frac{10\pi}{7} = \cos \frac{4\pi}{7} \quad \text{és} \quad \cos \frac{8\pi}{7} = \cos \frac{6\pi}{7}.$$

Eszerint a zárójelben foglalt összeg:

$$1 + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = 0,$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

II. Megoldás. Az előbbi megoldásban kimutattuk, hogy

$$\sum_{k=0}^6 \cos \frac{2k\pi}{7} = \cos 0 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0.$$

Ha figyelemmel vagyunk arra, hogy az

$$x^7 - 1 = 0$$

egyenlet gyökei

$$\cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

alakban írhatók és ezen gyökök összege zérus, akkor

$$\sum_{k=0}^6 \cos \frac{2k\pi}{7} = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^6 \sin \frac{2k\pi}{7} = 0.$$

III. Megoldás. Vizsgáljuk az általánosabb

$$(1) \quad S = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha$$

összeget, amelyben a szögek számtani haladványt alkotnak; a haladvány első tagja α , különbsége is α ¹. Szorozzuk az 1) minden tagját $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ -vel. Ekkor

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin \left(\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right), \\ 2 \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin \left(2\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(2\alpha - \frac{\alpha}{2} \right), \\ 2 \cos 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin \left(3\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(3\alpha - \frac{\alpha}{2} \right), \\ &\dots\dots \\ 2 \cos n\alpha \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin \left(n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(n\alpha - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Mint hogy $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha - \frac{\alpha}{2}$, $2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 3\alpha - \frac{\alpha}{2}$ s. i. t., a jobboldalon álló tagok az összegezéskor eltűnnek, kivéve kettőt, úgy hogy

$$2S \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(n\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

Az adott esetben $n = 3$, $\alpha = \frac{2\pi}{7}$, tehát

$$2S \sin \frac{\pi}{7} = 2 \cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = -2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = -\sin \frac{6\pi}{7}.$$

Azonban

$$\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{6\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7},$$

és így

$$S = -\frac{1}{2}.$$

¹Az ilyen összeg kiszámítását tetszőleges különbség esetére is, lásd IV. évfolyamunk 197. o. (Goldziher: Goniometrikus többtagúak).