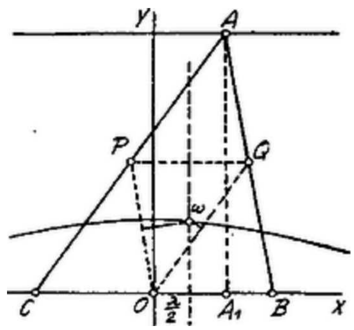
Derékszögű koordinátarendszerünk X-tengelyéül válasszuk a BC egyenest, kezdőpontul BC felezőpontját O-t. A B csúcs koordinátái $(b,\ 0)$, a C ponté $(-b,\ 0)$, az A csúcsé $(\lambda,\ h)$, ahol λ változó, míg a h állandó.



A háromszög Feuerbach-köre keresztülmegy az oldalak felezőpontjain, tehát az

$$O(0,\ 0),\quad P\left(\frac{-b+\lambda}{2},\frac{h}{2}\right),\quad Q\left(\frac{b+\lambda}{2},\frac{h}{2}\right)$$

pontokon. A Feuerbach-kör egyenlete, minthogy keresztülmegy az origón,

$$x^2+y^2+kx-ly=0$$

alakban írható. Ezen egyenletet kielégítik a P és Q pontok koordinátái:

$$\left(-\frac{b+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+k\left(\frac{-b+\lambda}{2}\right)+l\frac{h}{2}=0,$$
$$\left(\frac{b+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+k\left(\frac{b+\lambda}{2}\right)+l\frac{h}{2}=0.$$

Ezen két egyenletből a megfelelő tagok kivonása után:

$$b\lambda+bk=0,\quad \text{azaz}\quad k=-\lambda.$$

k értékét helyettesítve

$$l=\frac{b^2+h^2-\lambda^2}{2h}.$$

A Feuerhach-kör középpontjának koordinátái:[1]

$$\xi=-\frac{k}{2}=+\frac{\lambda}{2},\qquad \eta=-\frac{l}{2}=+\frac{b^2+h^2-\lambda^2}{4h}.$$

λ paramétert kiküszöbölve, a Feuerbach-kör középpontjának koordinátái között az

$$\eta=\frac{b^2+h^2-\dfrac{\xi^2}{4}}{4h}\qquad\text{vagy}\qquad y=\frac{4\left(b^2+h^2\right)-x^2}{16h}$$

összefüggéshez, azaz parabola egyenletéhez jutunk.

Ha tehát A a BC-vel párhuzamos egyenest ír le, az $ABC\triangle$ Feuerbach-körének középpontja oly parabolát ír le, melynek főtengelye a BC-t merőlegesen felező egyenes és felső tetőpontja van, ha t. i. $h>0$, ezen egyenesen, BC-től $\dfrac{b^2+h^2}{4h}$ távolságban. (Ezen pont akkor lesz a Feuerbach-kör középpontja, ha $ABC\triangle$ egyenlőszárú.)

Berger Tibor (Áll. Fáy András g. VIII. o. Bp. IX.)

---

[1] A Feuerbach-kör keresztülmegy az A-ból húzott magasság talppontján, A_1-n is. OA_1 a kör húrja, téhát a kör középpontja ezen húrt felező $x=\dfrac{\lambda}{2}$ egyenesen fekszik!