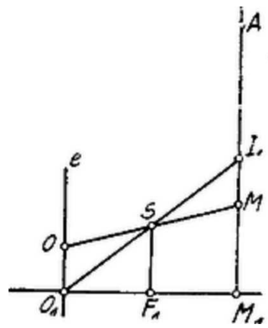
I. Megoldás. A magassági ponttal bíró tetraédert nevezzük orthocentrikusnak.[1] Az ilyen tetraéderben az M magassági pont (orthocentrum) vetülete valamely határlapon ezen határlap M_i magassági pontja; a körülírt gömb O középpontjának az illető határlapon vetülete az illető határlap köré írható kör O_i középpontja. Az MO távolságot felezi a tetraéder S súlypontja. Az MO egyenes vetülete a tetraéder határlapján az illető lap Euler–egyenese. Az S pont vetülete az illető határlaphoz tartozó Feuerbaeh–kör középpontja, F_i, úgy hogy $M_iF_i = F_iO_i$.



Fektessünk az orthocentrumos tetraéder A_1 csúcsán, az M orthocentrumon és az S súlyponton keresztül síkot. Ez merőleges az $A_2A_3A_4$ lapra. A_1M talppontja az $A_2A_3A_4\,\Delta$ magassági pontja, M_1. Az A_1MS síkban az MS egyenesen fekszik a körülírt gömb O középpontja úgy, hogy $MS = SO$. Az O vetülete az $A_2A_3A_4$ síkon O_1, az S vetülete F_1; tudvalevőleg $SF_1 = \frac{1}{4}A_1M_1$.

Legyen már most I_1 az A_1M_1 szelet felezőpontja és így $SF_1 = \frac{1}{2}I_1M_1$. Ekkor I_1S az M_1F_1 egyenest oly O_1 pontban metszi, amelyre nézve $M_1O_1 = 2M_1F_1$, azaz O_1 az $A_2A_3A_4\,\Delta$ köré írt kör középpontja és $I_1S = SO_1$.

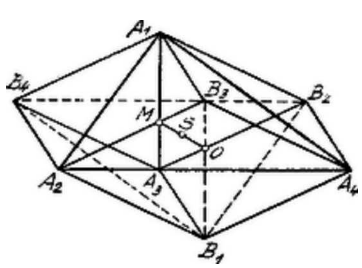
Ha már most I_1 a tetraéder magassági pontja, akkor az előbbiek szerint a tetraéder köré írt gömb középpontja O_1 és ez az $A_2A_3A_4$ lapon fekszik.

Ha a tetraéder magassági pontja I_1-től M_1 felé mozog, akkor a körülírt gömb O középpontja azon e egyenesen mozog a tetraéder belseje felé, amely az $A_2A_3A_4$ lapra O_1-ben merőleges; O mindenkor az e és MS egyenes metszőpontja. Ha a tetraéder magassági pontja mindegyik magasságon a felezőpont és talppont közé esik, akkor mindegyik határlapra nézve a szemközti csúcs és O a határlap ugyanazon oldalán feküsznek, tehát O a tetraéderen belül van.

Ha pedig M pl. az I_1M_1 szakaszon kívül van, akkor IS az e egyenest már oly pontban metszi, mely a tetraéderen kívül esik.

Jegyzet. Ha M az M_1-be esik, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy M_1 a tetraéder egyik csúcsa, amelyben összefutó élek páronként egymásra merőlegesek. Előáll tehát azon eset, hogy van egy magasság – t. i. M_1-ből a szemközti lapra bocsátott magasság, – amelyen a tetraéder magassági pontja nem fekszik a felezőpontja és talppontja közötti szakaszon.

II. Megoldás. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder köré írjunk parallelepipedont, a 2. számban, a 33. oldalon körülírt módon.[2] A parallelepipedon többi csúcsai B_1, B_2, B_3, B_4 oly tetraéder csúcsai, amelynek az előbbivel közös S súlypontja van; a két tetraéder, röviden A és B, az S-re nézve centrálisan szimmetrikus.[3] Ugyancsak a 2. sz. 35. oldalán, az utolsó bekezdésben foglaltakból kitűnik, hogy az A tetraéder köré írt gömb középpontja B-nek magassági pontja és viszont. Végül vegyük figyelembe, hogy a $B_2B_3B_4$ lap az A tetraéder A_1 csúcsából kiinduló m_1 magasságot felezi és párhuzamos az $A_2A_3A_4$ lappal.



Ezekből következik:

1. Ha az A tetraéder M magassági pontja az m_1 talppontja és I_1 felezőpontja között van, azaz a $B_2B_3B_4$ és $A_2A_3A_4$ síkok között, akkor a vele szimmetrikus B tetraéder magassági pontja, vagyis az A tetraéder köré írt gömb O középpontja ugyancsak az előbbi két sík között van, tehát O és A_1 az $A_2A_3A_4$ sík ugyanazon oldalán vannak. Ha az

[1] L. II. évfolyamunk 180. o. a 111., 206. o. a 115. feladatot (az 1926/2., ill. 1926/3. füzetekben – a szerk.).

[2] XIV. évf. 2. sz. Egerváry: A tetraéderről (l. az 1937. év 10. havi füzetben – a szerk.).

[3] A_i és B_i egy testáló végpontjai. Mindegyik testátló keresztülmegy az éltengelyek metszőpontján; ezen pont úgy az A, mint a B tetraéder súlypontja.

M magassági pont helyzete mindegyik tetraéder–magasságra nézve olyan helyzetű, mint m_1-en, akkor M a tetraéder belsejében van.

2. Ha az A tetraéder M magassági pontja pl. az m_1 felezi, azaz a $B_2B_3B_4$ síkban van, akkor a B tetraéder magassági pontja, vagyis az A köré írt gömb O középpontja az $A_2A_3A_4$ síkban van.

3. Ha az A tetraéder M magassági pontja az m_1 talppontja és felezőpontja közötti szakaszon kívül van, azaz a B tetraéderen kívül, akkor a B tetraéder magassági pontja, vagyis az A köré írt gömb O középpontja az A tetraéderen kívül van.

Weisz Alfréd (Bolyai gimn. VIII. o. Bp. V.).