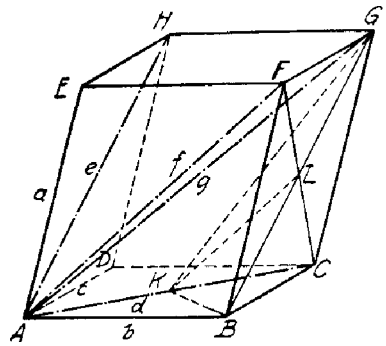
I. Megoldás. A parallelepipedon A csúcsában összefutó élek: $AE = a$, $AB = b$, $AD = d$; oldalátlók: $AC = d$, $AH = e$, $AF = f$; testátlója $AG = g$.

Tekintsük már most az $ABCG$ térnégyszöget;[1] ennek oldalai; $AB = b$, $BC = AD = c$, $CG = AE = a$ és $AG = g$.

Ezen négyszögnek egyik átlója: $AC = d$, a másik: $BG = AH = e$. Ezen két átló felező pontjai K, ill. L. Nyilván $KL = AF = \frac{1}{2}f$.



Kössük össze K-t B-vel és G-vel. BK az $ABC\,\Delta$-ben az AC oldalhoz tartozó súlyvonal. Ezért

$$b^2 + c^2 = 2\overline{BK}^2 + 2\overline{AK}^2 \ldots \tag{1}$$

GK az $AGC\,\Delta$-ben az AC oldalhoz tartozó súlyvonal. Ezért:

$$a^2 + g^2 = 2\overline{GK}^2 + 2\overline{AK}^2 \ldots \tag{2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + g^2 = 2(\overline{BK}^2 + \overline{GK}^2) + (2AK)^2 \ldots \tag{3}$$

A $BKG\,\Delta$-ben pedig KL a BG oldalhoz tartozó súlyvonal és ezért:

$$\overline{BK}^2 + \overline{GK}^2 = 2\overline{KL}^2 + 2\overline{BL}^2 \ldots \tag{4}$$

Helyettesítve ezt 3)-ban:

$$a^2 + b^2 + c^2 + g^2 = (2KL)^2 + (2BL)^2 + (2AK)^2 = f^2 + e^2 + d^2.$$

Eszerint az általános parallelepipedonban az egy csúcsban ütköző élek és testátló négyzetének összege egyenlő az ugyanazon csúcsba ütköző három oldalátló négyzetének összegével.

Jegyzet. Ezen tétel a matematikai irodalomban Euler–féle tétel néven ismeretes. Érvényes a síknégyszögre abban az értelemben, amint ez a XIII. évf. 195. oldalán[2], III. alatt látható: a síknégyszög oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével + az átlók felezőpontjait összekötő távolság négyszeres négyzetével.

II. Megoldás. IV. évfolyamunk 3. számában[3] (54. o.), a 283. feladatban kimutattuk, hogy

a parallelepipedon három, egy csúcsból kiinduló élének végpontjai oly háromszöget határoznak meg, melynek síkját a háromszög súlypontjában döfi át a szóbanforgó csúcsból kiinduló testátló, továbbá ezen pont a testátlót 1:2 arányban osztja két részre.

Eszerint az $A(EBD)$ tetraéderben a g testátló $\frac{1}{3}$ része a tetraéder egyik súlyvonala, az $EBD\,\Delta$ súlypontján megy keresztül; az A csúcsból kiinduló élek a, b, c, az $EBD\,\Delta$ oldalai pedig az $EB = F'$,$ED = e'$, $BD = d'$ oldalátlók.

A $G(EBD)$ tetraéderben pedig a g testátló $\frac{2}{3}$ része azon súlyvonal, mely az $EBD\,\Delta$ súlypontján megy keresztül; a G-ből kiinduló élek pedig a d, e, f oldalátlókkal egyeznek meg.

Alkalmazzuk már most ezen két tetraédernek A-ból, ill. G-ből kiinduló súlyvonalaira a 238. feladat keretében (III. évf. 243. o.[4]) kimutatott összefüggést a tetraéder egy–egy súlyvonala és élei között; eszerint

$$9\left(\frac{g}{3}\right)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (d'^2 + e'^2 + f'^2)$$
$$9\left(\frac{2g}{3}\right)^2 = 3(d^2 + e^2 + f^2) - (d'^2 + e'^2 + f'^2).$$

[1] Térnégyszög vagy *torz*négyszög.
[2] az 1937. évi 3. számban (a szerk.)
[3] az 1927. évi 10. számban (a szerk.)
[4] az 1927. évi 4. számban (a szerk.)

E két egyenlet megfelelő oldalainak kivonásával keletkezik:

$$3g^2 = 3(d^2 + e^2 + f^2) - 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

tehát

$$g^2 + a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2.$$

Fehér György (Fazekas Mihály r. VIII. o. Debrecen).
Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály r. VIII. o. Debrecen).

Jegyzet. A többi megoldás nem volt figyelembe vehető; ugyanis ezek *derékszögű* parallelepipedonra mutattak ki oly összefüggést, amely nyilván speciális esete az általánosnak.