Legyen $ABC\,\Delta$ a feltételeknek megfelelő. Hosszabbítsuk meg az AB és AC oldalakat, szerkesszük meg azon kört, mely az α szög szárai között fekszik és a háromszöget kívülről érinti.[1] Ezen kör I_1 középpontja az α-t felező egyenesen fekszik; ha érintési pontjai az oldalakon A_1, B_1, C_1, akkor

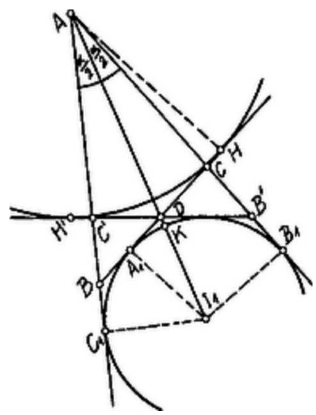
$$BA_1 = BC_1 \quad \text{és} \quad CA_1 = CB_1.$$

Minthogy $AB_1 = AC_1$ és

$$AB_1 + AC_1 = AC + CB_1 + AB + BC_1 = AC + AB + BC = 2s,$$

nyilván

$$AB_1 = AC_1 = s.$$



A BC oldal az A középponttal bíró és $AH = m_a$ sugarú körnek érintője, tehát közös belső érintője ezen és az I_1 körnek.

A szerkesztés ezek alapján ez lesz. Az α szög száraira felmérjük a kerület felét: $AB_1 = AC_1 = s$ távolságokat. B_1-ben ill. C_1-ben AB_1 ill. AC_1-re merőlegest emelünk. Ez az α felezőjét I_1 pontban metszi. Megrajzoljuk az I_1 pontból az $I_1B_1 = I_1C_1$ sugarú és az A pontból az AH sugarú kört. E két kör közös belső érintője lesz a BC oldal tartója. (Két megoldás, az α felezőjére szimmetrikus helyzetben.)

Vizsgáljuk meg a szerkesztés lehetőségének feltételét. A határesetben – t. i. amikor még van az előbb meghatározott két körnek közös belső érintője – e két kör kívülről érinti egymást az AI_1 szögfelező és az I_1 kör K metszéspontjában. Kell tehát, hogy $AH = m_a < AK$ legyen.

Már most

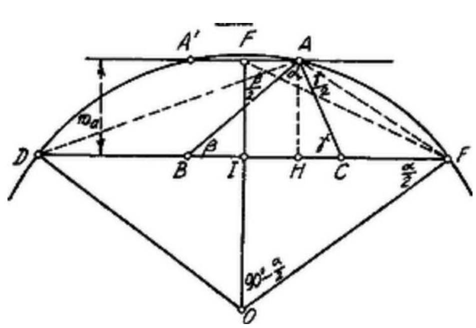
$$AK = AI_1 - KI_1 = \frac{AB_1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - I_1B_1 = \frac{s}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Eszerint a szerkesztés lehetőségének feltétele:

$$m_a < \frac{s\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

II. Megoldás. A feltételeknek megtelelő $ABC\,\Delta$ BC oldalát hosszabbítsuk meg mindkét irányban és mérjük fel rá a $BD = BA$ és $CE = CA$ távolságokat. Így egy olyan $ADE\,\Delta$-et kaptunk, amely megszerkeszthető. Ugyanis

$$DE = DB + BC + CE = AB + BC + CA = 2s.$$



[1]A háromszöghöz hozzáírt kör!

A DE oldalhoz tartozó magasság $AH = m_a$. Az $ABD\,\Delta$ egyenlőszárú; az AD alapján fekvő szögek összege $=\beta$, tehát mindegyikük $\dfrac{\beta}{2}$. Hasonlóan az $ACE\,\Delta$-ben az AE alapon fekvö szögek mindegyike $\dfrac{\gamma}{2}$. Eszerint

$$DAE\sphericalangle = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Az $ADE\,\Delta$ DE oldala oly kör húrja, amelyhez tartozó nagyobbik kerületi szög $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$; a hozzátartozó domború középponti szög $180+\alpha$, tehát $DOE\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$ és a DOE egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek mindegyike $\dfrac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés menete tehát ez lesz: tetszőleges egyenesen felmérjük a $DE = 2s$ távolságot (a szerkesztendő háromszög kerületét.) Ennek végpontjaiban $\dfrac{\alpha}{2}$ nagyságú szögeket mérünk fel úgy, hogy a DOE egyenlőszárú háromszög keletkezzék. Az $OD = OE$ sugárral kört szerkesztünk; ennek kisebbik ívén kell az A csúcsnak feküdnie, a DE-től m_a távolságban. DE-re bárhol merőlegest emelünk, e merőlegesre felmérjük az m_a távolságot és ezen távolságban DE-vel párhuzamos g egyenest húzunk. Ahol g metszi az O kört, ott lesz a háromszög A csúcsa. Az AD ill. AE húrokat merőlegesen felező egyenesek DE-t a B ill. C csúcsban metszik.

g egyenes az O kört két pontban metszi (A és A'); így 2 megoldást kapunk, az $OF(\perp DE)$ egyenesre szimmetrikus helyzetben: a két megoldás ugyanazon alkatrészekkel bíró háromszöget szolgáltat. Ha g érinti a kört, a két megoldás összeesik. A és A' az F-be esnek és $ABC\,\Delta$ egyenlőszárú lesz.

Hogy megoldás legyen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $m_a \leqq FI$ legyen, ahol I a DE felezőpontja.

Az FIE derékszögű háromszögben $IE = s$,
és

$$IFE\sphericalangle = \frac{1}{2}DAE\sphericalangle = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}.$$

Eszerint $FI = s\,\mathrm{cotg}\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}\right)$.

A szerkesztés lehetőségének feltétele: $m_a < s\,\mathrm{cotg}\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}\right)$.

Holzer Pál (Faludi Ferenc g. VIII. o. Szombathely.)

Jegyzet. A megoldás két feltételéből azt kell következtetnünk, hogy

$$\frac{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \mathrm{cotg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Ennek kimutatását az 1382. feladatban tűzzük ki.