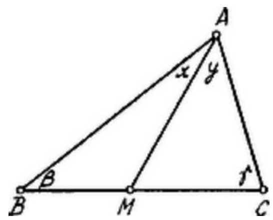
1^0. Az ABM, ill. ACM háromszögre érvényes:

$$AM : BM = \sin\beta : \sin x, \quad AM : MC = \sin\gamma : \sin y.$$

E két aránypár megfelelő tagjait szorozva:

$$\overline{AM}^2 : \overline{BM} \cdot \overline{MC} = \sin\beta \sin\gamma : \sin x \sin y.$$



Ha azonban AM a BM és MC darabok mértani középarányosa, akkor

$$\overline{AM}^2 = BM \cdot MC \quad \text{és így} \quad \sin x \sin y = \sin\beta \sin\gamma.$$

2^0. x+y=α. Az 1^0. alatti összefüggés alapján

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = \sin\beta \sin\gamma$$

ill.

$$\cos(x-y) = 2\sin\beta\sin\gamma + \cos(x+y) = 2\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha.$$

Ilyen módon $x+y=\alpha$ adott összefüggésen kívül kiszámítjuk $(x-y)$-t úgy, hogy x és y meghatározható.

3^0.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{esetében} \quad \cos\alpha = 0 \quad \text{és}$$

$$\cos(x-y) = 2\sin\beta\sin\gamma = 2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)$$

vagy

$$\cos(x-y) = 2\sin\beta\sin\gamma = 2\cos\gamma\sin\gamma = \sin 2\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right)$$

és kiemeljük, hogy $|x-y|$, valamint $\left|\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right|$ csak hegyesszög lehet.

Már most két eset lehetséges:

1) $x+y = \frac{\pi}{2}$ és $x-y = \frac{\pi}{2} - 2\beta$. Innen $x = \frac{\pi}{2} - \beta = \gamma$ és $y = \beta$.

2) $x+y = \frac{\pi}{2}$ és $x-y = \frac{\pi}{2} - 2\gamma$. Innen $x = \beta$ és $y = \gamma$.

Ha $x=\beta$, $y=\gamma$, az AMB és AMC háromszögek egyenlőszárúak. $BM = AM = CM$; most az M pont BC átfogó felezőpontja, a háromszög köré írható kör középpontja. Ekkor valóban: $\overline{AM}^2 = BM \cdot MC$.

Ha pedig $x=\gamma$ és $y=\beta$, az AMB és BAC háromszögek hasonlóak: $AMB\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \frac{\pi}{2}$. Ezen esetben AM az átfogóhoz tartozó magasság, amely valóban mértani kőzéparányosa az átfogó két szeletének.

Cseresnyés Zoltán (Ref. g. VII. o. Debrecen).