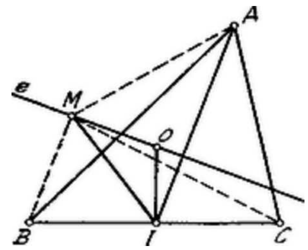
A háromszög köré írt kör O középpontja eleget tesz a követelménynek, mert $OA = OB = OC$.



Legyen M egy tetszőleges pont, melyre nézve

(1) $$\overline{MB^2} + \overline{MC^2} = 2\overline{MA^2} \ldots$$

Ha I a BC oldal felezőpontja, akkor az $MBC\triangle$-ben az MI súlyvonalra nézve érvényes:

(2) $$\overline{MB^2} + \overline{MC^2} = 2\overline{MI^2} + 2\overline{BI^2} \ldots$$

1)-ből és 2)-ből

$$2\overline{MA^2} = 2\overline{MI^2} + 2\overline{BI^2}$$

vagyis

(3) $$\overline{MA^2} - \overline{MI^2} = \overline{BI^2} \ldots$$

azaz az M pontra nézve az A és I szilárd pontoktól való távolságok négyzetének különbsége állandó, tehát az M mértani helye oly egyenes, mely AI-re merőleges és a fentiek szerint keresztülmegy a háromszög köré írt kör középpontján.

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Derékszögű koordinátarendszerünk X-tengelye legyen a BC egyenes és origója a BC oldal felező pontja.

A B csúcs koordinátái: $(-b,0)$, a C csúcsé $(b,0)$, az A csúcsé (a,h). Ha az M koordinátái x, y, akkor ezekre nézve érvenyes:

(1) $$(x-b)^2 + y^2 + (x+b)^2 + y^2 = 2\left[(x-a)^2 + (y-h)^2\right] \ldots$$

A kijelölt műveletek végrehajtása és egynemű tagok összevonása után

(2) $$2ax + 2hy = a^2 + h^2 - b^2 \ldots$$

Eszerint az M pont koordinátái között elsőfokú összefüggés áll fenn; ez egyenes egyenlete. Ezen egyenes irányhatározója $-\dfrac{a}{h}$, az OA egyenesé pedig $\dfrac{h}{a}$, tehát a 2) egyenes merőleges OA-ra (az $ABC_\triangle$ súlyvonalára).

Azon M pont, amelyre nézve $x = 0$, az Y-tengelyen, a BC-t merőlegesen felező egyenesen fekszik és 2) szerint az

$$y = \frac{a^2 + h^2 - b^2}{2h}$$

ordináta határozza meg. Könnyen igazolható, hogy a

$$\left(0,\ \frac{a^2 + h^2 - b^2}{2h}\right)$$

pont az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja. Ugyanis ennek az Y-tengelyen kell feküdnie, tehát koordinátái $(0,y)$; mivel egyenlő távolságban van A-tól és B-től (ill. C-től)

$$y^2 + b^2 = a^2 + (h-y)^2 \quad \text{és innen} \quad y = \frac{a^2 + h^2 - b^2}{2h}.$$