I. Megoldás. Vizsgáljuk az

$$y=\frac{k^2}{a^2+x}+\frac{l^2}{b^2+x}-1$$

függvény változását. a, b, k, l megadott valós számok, a^2, b^2, k^2, l^2 pozitív számok. A függvény mindenütt folytonos, kivéve az $x=-a^2$ és $x=-b^2$ helyeket. Ezen helyeken a függvény értéke $\mp\infty$; ugyanis, ha $\varepsilon>0$ és $x=-a^2-\varepsilon$ de $\varepsilon\to 0$, akkor $y\to-\infty$. Ha pedig $x=-a^2+\varepsilon$ és $\varepsilon\to 0$, akkor $y\to+\infty$.

Ugyanígy áll a dolog, ha $x=-b^2$.

Ha $x=\pm\infty$, akkor $y=-1$.

A függvény differenciálhányadosa

$$y'=-\frac{k^2}{\left(a^2+x\right)^2}-\frac{l^2}{\left(b^2+x\right)^2}.$$

Nyilván y' az x bármely értékénél <0, tehát a függvény mindenütt fogy. (Két helyen szakadása van.) A változását feltünteti a következő táblázat:

x	$-\infty$		$-a^2$		$-b^2$		$+\infty$
y	-1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	-1

A függvény $-a^2$ és $-b^2$ között folytonos és állandóan fogy, felvesz minden értéket $+\infty$-től $-\infty$-ig. Tehát egy helyen zérussá válik.

A függvény $-b^2$ és $+\infty$-között állandóan fogy, $+\infty$-től -1-ig; kell tehát, hogy egy helyen zérus legyen.

Ezek szerint az adott egyenlet egyik gyöke $-a^2$ és $-b^2$ között, a másik $-b^2$ és $+\infty$ között van. Itt feltételeztük, hogy $-a^2<-b^2$. Ha azonban $-b^2<-a^2$, akkor a második gyök $-a^2$ és $+\infty$ között van.

A függvényt ábrázoló görbének az $y=-1$, $x=-a^2$, $x=-b^2$ egyenesek aszimptótái. A görbe három ágból áll; egyiken sincs tetőpontja.

Fonó András (Verbőczy g. VI. o. Bp. I.)

II. Megoldás. A törteket eltávolítva, az

$$f(x)\equiv k^2(b^2+x)+l^2(a^2+x)-(a^2+x)(b^2+x)=0$$

egyenlethez jutunk. $f(x)$ az x oly másodfokú függvénye, melyben x^2 együtthatója -1, tehát

$$f(+\infty)=-\infty \quad \text{és} \quad f(-\infty)=-\infty.$$

Továbbá

$$f(-a^2)=k^2(b^2-a^2) \quad \text{és} \quad f(-b^2)=l^2(a^2-b^2)$$

Látjuk tehát, hogy $f(-a^2)$ és $f(-b^2)$ ellenkező előjelűek, azaz az $f(x)=0$ egyik gyöke $-a^2$ és $-b^2$ között van.

$f(-a^2)$ és $f(-b^2)$ egyike pozitív; ha $b^2>a^2$, akkor $f(-a^2)>0$, tehát a másik gyök $-a^2$ és $+\infty$ között van.

Ha pedig $a^2>b^2$, akkor $f(-b^2)>0$; ezen esetben a másik gyök $-b^2$ és $+\infty$ között van.

A második gyökre nézve is kijelölhetünk egy véges intervallumot. Minthogy az $f(x)=0$ egyenletre nézve a gyökök összege

$$x_1+x_2=k^2+l^2-a^2-b^2,$$

akkor, ha az egyik $-a^2$ és $-b^2$ között van, a másik gyök

$$k^2+l^2-a^2 \quad \text{és} \quad k^2+l^2-b^2$$

között lesz. Valóban, a függvény az utóbbi két helyen ellenkező előjelű:

$$f(k^2+l^2-a^2)=l^2(a^2-b^2) \quad \text{és} \quad f(k^2+l^2-b^2)=k^2(b^2-a^2).$$

Grosz László (Balassi Bálint g. VII. o. Balassagyarmat.)

Jegyzet. Az $f(x)$ discriminánsa

$$\begin{aligned}\Delta\equiv\left[(a^2+b^2)-(k^2+l^2)\right]^2-4a^2b^2+4k^2b^2+4l^2a^2=\\ \left(a^2+b^2\right)^2-2(a^2+b^2)(k^2+l^2)+\left(k^2+l^2\right)^2-4a^2b^2+4k^2b^2+4l^2a^2=\\ =\left(a^2-b^2\right)^2-2(a^2-b^2)(k^2-l^2)+\left(k^2-l^2\right)^2+4k^2l^2=\\ =\left[(a^2-b^2)+(k^2-l^2)\right]^2+4k^2l^2.\end{aligned}$$

Látjuk, hogy $\Delta>0$ és ezért az $f(x)=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van.

Azonban a feladat megoldásánál nincs szükségünk a discrimináns vizsgálatára.