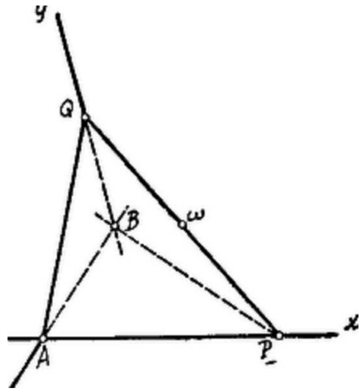
1^0. A $PABQ$ tetraéder alapjának tekintsük az A-nál derékszögű PAB háromszöget. Minthogy $BQ \perp BA$ és $BQ \perp AP$, azért BQ merőleges a PAB síkra és így BQ a PAB alaphoz tartozó magasság. Eszerint a tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \frac{1}{3}BQ = a \cdot x \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}axy = \frac{1}{3}ak^2$$

azaz V értéke állandóan ugyanakkora.



2^0. Ha az A csúcs távolsága a PBQ laptól h, akkor

$$V = \frac{1}{3}ht_{PBQ}$$

Láttuk, hogy $BQ \perp [PAB]$, tehát $BQ \perp BP$, azaz: a $PBQ\,\Delta$ B-nél derékszögű és így

$$t_{PBQ} = \frac{1}{2}BQ \cdot BP = \frac{1}{2}y\sqrt{\overline{AB}^2 + AP^2} = \frac{1}{2}y\sqrt{4a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2y^2 + k^4}.$$

$$V = \frac{1}{6}h\sqrt{4a^2y^2 + k^4}, \text{ innen } h = \frac{6V}{\sqrt{4a^2y^2 + k^4}} = \frac{2ak^2}{\sqrt{4a^2y^2 + k^4}}.$$

3^0. $AP \perp AB$ és $AP \perp BQ$, tehát $AP \perp [ABQ]$, ill. $AP \perp AQ$. Eszerint PQ közös átfogója a B-nél derékszögű PBQ és az A-nál derékszögű PAQ háromszögeknek. Ezért PQ felezőpontja ω, egyenlő távolságban van P, Q, A, B pontoktól, tehát a tetraéder köré írt gömb középpontja. E gömb átmérője PQ és

$$\overline{PQ}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 =$$
$$= 4a^2 + (x-y)^2 + 2xy = 4a^2 + 2k^2 + (x-y)^2$$

A PQ gömbátmérő minimum, ha $(x-y)^2 = 0$, azaz, ha $x = y = k$.

Jónás Emil (Balassi Bálint g. VIII. o. Balassagyarmat)