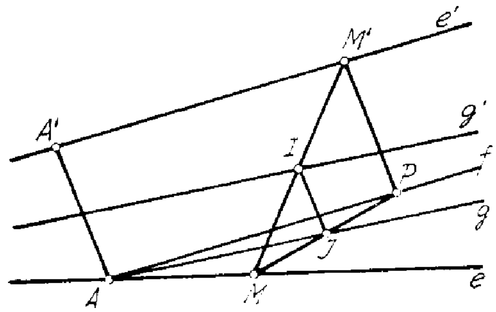
I. Megoldás. Az M' pontból húzzuk meg $M'P$-t úgy, hogy $M'P \# A'A$ legyen. (A párhuzamosság ugyanolyan irányú is legyen). Ekkor $A'M'PA$ parallelogramma, azaz $AP \# A'M'$, tehát a P pont az e'-vel párhuzamos és A ponton átmenő f egyenest írja le. Minthogy most $\frac{AM}{AP} = k$, az MP iránya mindig ugyanaz és így az MP felezőpontja J, az A ponton átmenő g egyenest írja le.



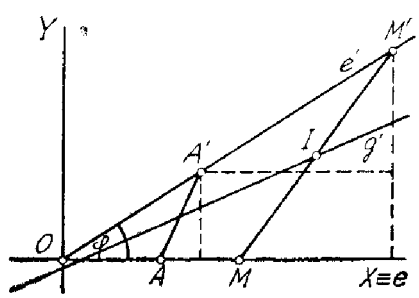
Legyen I az MM' felezőpontja, tehát $JI \parallel PM'$ és $JI = \frac{1}{2}PM' = \frac{1}{2}AA'$.

Eszerint JI nagyságra nézve állandó, irányra nézve pedig PM' ill. AA' irányával egyezik meg. Tehát az I pont mértani helye azon g' egyenes, mely párhuzamos g-vel és AA'-t felezi.

Jegyzet. Néhány dolgozatban azon állítás, ill. következtetés foglaltatik, hogy az I pont mértani helye, a g' egyenes keresztülmegy az e és e' egyenesek O metszőpontján. Egyszerű meggondolás alapján mondhatjuk, hogy ez általában lehetetlen; ha ugyanis O valamely MM' távolság felezőpontja, akkor M' az MO egyenes mentén kell, hogy feküdjék, tehát M' is az e-nek pontja. Eszerint: O csak abban az esetben lehet az I mértani helyének pontja, ha M és M' összeesik az O-ban, azaz k oly értéke mellett, amellyel $\frac{AO}{A'O} = k$. (Ez a helyzet a g-re nézve!) Ekkor az összes MM' távolságok párhuzamosak!

Minthogy a beérkezett dolgozatok a feladatot analitikai úton tárgyalják, ilyen megoldást is közlünk.

II. Megoldás. Derékszögű koordinátarendszerünk X tengelye legyen az e egyenes, kezdőpontja az e és e' egyenesek O metszőpontja. Az e' egyenes hajlásszöge az X tengelyhez legyen φ.



Az A pont koordinátái: $(a,\,0)$. Az M ponté: $(a+\lambda,\,0)$, ahol $\lambda = AM$ felvehet minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig.

Az A' pont koordinátái $(a',\,a'\mathrm{tg}\varphi)$.

Minthogy $A'M' = \frac{AM}{k} = q \cdot AM$[1] $= q\lambda$,

az M' pont koordinátái: $(a' + q\lambda\cos\varphi,\;a'\mathrm{tg}\varphi + q\lambda\sin\varphi)$.

Az MM' távolság I felezőpontjának koordinátái:

$$\xi = \frac{a+\lambda+a'+q\lambda\cos\varphi}{2}, \qquad \eta = \frac{a'\mathrm{tg}\varphi + q\lambda\sin\varphi}{2}.$$

Amint látjuk, $(\xi,\,\eta)$ a λ paraméter elsőfokú függvényei. Ha $\lambda = 0$, $\xi = \frac{a+a'}{2}$, $\eta = \frac{a'\mathrm{tg}\varphi}{2}$. Ezen koordináták az AA' távolság felező pontját határozzák meg: ezen pont a mértani helyhez tartozik.

Hogy ξ és η között nyerjünk összefüggést, λ-t ki kell küszöbölnünk.

Írhatjuk:

$$2\xi - a - a' = \lambda(1 + q\cos\varphi), \qquad 2\eta - a'\mathrm{tg}\varphi = \lambda q\sin\varphi,$$

tehát

$$\frac{2\eta - a'\mathrm{tg}\varphi}{2\xi - a - a'} = \frac{q\sin\varphi}{1+q\cos\varphi} \text{ ill. } 2\eta - a'\mathrm{tg}\varphi = \frac{q\sin\varphi}{1+q\cos\varphi} - (2\xi - a - a').$$

[1] $\frac{1}{k} = q$ helyettesítés tört kikerülése céljából. Éppen így írhattuk volna: $A'M' = k \cdot AM$.

Ha már most $(\xi,\,\eta)$ helyett $(x,\,y)$-t írunk, a keresett mértani hely egyenlete:

$$2y - a'\mathrm{tg}\varphi = \frac{q\sin\varphi}{1+\cos\varphi}(2x-a-a'),$$

tehát egyenes egyenlete.[2]

Ezen egyenes általában nem megy keresztül az origon, az e és e' egyenes metszőpontján. $x=0$, $y=0$ csak akkor pontja az egyenesnek, ha

$$-a'\mathrm{tg}\varphi = -\frac{q\sin\varphi}{1+q\cos\varphi}(a+a'),\ \text{vagyis}\ a'(1+q\cos\varphi) = (a+a')q\cos\varphi$$

tehát, ha

$$\frac{a'}{\cos\varphi} = qa.$$

Azonban $\dfrac{a'}{\cos\varphi} = OA'$, $a = OA$, azaz $OA' = qOA = \dfrac{OA}{k}$,
ill.

$$\frac{OA}{OA'} = k.$$

Ez megegyezik azzal, amit az I. megoldáshoz fűzött jegyzetünkben fejeztünk ki.

[2]Ha $x = \dfrac{a+a'}{2}$, akkor $y = \dfrac{a'\mathrm{tg}\varphi}{2}$. Az egyenes keresztülmegy AA' felező pontján.