

I. Megoldás. Valamely mennyiséget két tizedes pontossággal adunk meg, ha a hiba a századrész felénél nem nagyobb.

a) Ismeretes, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1$, azaz a kicsiny szögek sinusának közelítő értéke a szög abszolút mérőszáma, még pedig úgy, hogy $\sin x < x$.¹

Kimutatjuk, hogy

$$\sin x > x - \frac{x^2}{4}.$$

Ugyanis

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right).$$

Azonban $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x^2}{2}$

és, mivel $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, azért $1 - \sin^2 \frac{x}{2} > \frac{x^2}{4}$,

tehát

$$\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) \quad \text{azaz} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

Ez annyit jelent, hogy ha $\sin x$ közelítő értékéül x -et vesszük, a hiba kisebb, mint $\frac{x^3}{4}$.

1° abszolút mérőszáma: $\frac{\pi}{180} = 0,01745 \dots$

3° „ „ : 0,5236...

A hiba felső határa:

$$\frac{(0,05236 \dots)^3}{4} < \frac{0,06^2}{4} < 0,0001.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értékéül 0,05236-ot tekintve, legfeljebb a tizedrész nem pontos, de ezredrészig feltétlenül pontos; ha tehát két tizedes pontossággal óhajtjuk $\sin 3^\circ$ -értékét, akkor ez: 0,05. A hiba, t. i. 0,002... a századrész felénél kisebb.³

b) Kicsiny szögek cosinusára érvényes:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Ugyanis

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2,$$

azaz

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ha pedig figyelemmel vagyunk arra, hogy

$$\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^3,$$

akkor

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 1 - 2 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32} \right)^2,$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{16 \cdot 32}.$$

Ha a jobb oldalon az utolsó tagot elhagyjuk, még nagyobbat kapunk, azaz

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Eszerint $1 - \frac{x^2}{2}$ a $\cos x$ -nek hiánnyal közelítő értéke; a hiba kisebb, mint $\frac{x^4}{16}$.

¹ x a $\sin x$ -et felülről közelíti meg; x a $\sin x$ -nek fölösen közelítő értéke.

² $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

³ Azonban $0,05 < \sin 3^\circ$.

Azonban 3° esetében $\frac{x^4}{16} < \frac{(0,06)^4}{16} < 10^{-6}$,
tehát

$$1 - \frac{x^2}{2} = 1 - 0,00137 = 0,99863$$

feltétlenül pontos 4 tizedesig, azaz

$$0,998 < \cos 3^\circ < 0,999.$$

Eszerint, ha két tizedesig pontos értéket óhajtunk, akkor követünk el a századrész felénél kisebb hibát, ha $\cos 3^\circ = 1$.
NB. Pontosabb vizsgálatok kiderítették, hogy

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

és

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

azaz az előbbi számításokban jelzett hibahatárok csökkenthetők, tehát

$$\begin{array}{ll} \sin x \text{ esetében} & 0 < x - \sin x < \frac{x^3}{6} \text{ (az előbbi } \frac{x^3}{4} \text{ helyett)} \\ \cos x \text{ „} & 0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24} \text{ (az előbbi } \frac{x^4}{16} \text{ helyett).} \end{array}$$

Jegyzet. A dolgozatok általában nem ügyelnek a hiba megbecslésére. Innen van az, hogy némely megoldásban ez található: $\sin 3^\circ < 0,052$, ill. $\cos 3^\circ = 0,99$.

Az itt közölt megoldásban követett gondolatmenet bármely elég kis szög sinusára, ill. cosinusára alkalmazható. Ha tekintettel vagyunk, hogy éppen 3° -ról van szó, számításunk egyszerűsíthető, a következő megoldás szerint.

II. Megoldás. Előbbi megoldásunk elején megállapítottuk, hogy

$$0,05 < \sin 3^\circ = 0,05236 \dots < 0,053.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értéke két tizedes pontossáig 0,05.
Míthogy

$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 3^\circ} \\ \sqrt{1 - 0,053^2} &< \cos 3^\circ < \sqrt{1 - 0,05^2} \\ \sqrt{1 - 0,053^2} &= \sqrt{1 - 0,002809} = \sqrt{0,997191} = 0,998 \dots \end{aligned}$$

Eszerint

$$0,998 < \cos 3^\circ < 1.$$

$\cos 3^\circ$ értéke két tizedes pontossáig 1.

Jegyzet. Ha figyelemmel vagyunk arra, hogy (mindig az első negyedben maradva)

$$\sin 2x < 2 \sin x, \quad \sin 3x < 3 \sin x, \dots \quad \sin nx < n \sin x,$$

akkor

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ < 10 \sin 3^\circ \quad \text{vagyis} \quad \sin 3^\circ > \frac{\sin 30^\circ}{10} = \frac{0,5}{10}, \\ \sin 3^\circ > 0,05. \end{aligned}$$

III. Megoldás. $\sin 3^\circ$ kiszámítható a sinusfüggvény addíció-tételének felhasználásával. Ugyanis

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

A szabályos tízszög segítségével

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

15° függvényei a 30°-ú szög függvényeiből számíthatók ki.

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

4

Ezekkel az értékekkel

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{1}{16} \left[\sqrt{30} - \sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{60 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{20 + 4\sqrt{5}} \right].$$

Számítsuk ki ezen négyzetgyököket 4 tizedes pontossággal:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{30} = 5,4772 + \varepsilon_1 & \sqrt{6} = 2,4491 - \varepsilon'_1 \\ +\sqrt{10} = 3,1623 - \varepsilon_2 & +\sqrt{2} = 1,4142 + \varepsilon'_2 \\ +\sqrt{20 + 4\sqrt{5}} = 5,3800 - \varepsilon_3 & +\sqrt{60 + 12\sqrt{5}} = 9,3184 + \varepsilon'_3 \\ \hline 14,0195 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 & 13,1817 - \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3. \end{array}$$

5

Itt mindegyik $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, úgy, hogy a kivonásnál fellépő hiba abszolút értéke

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_3| < \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 < 3 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Ha most

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}(14,0195 - 13,1817) = \frac{0,8378}{16} = 0,0523\dots,$$

akkor ezen érték ezredrészig feltétlenül pontos; tehát századrész pontossággal $\sin 3^\circ = 0,05$.

$\cos 3^\circ$ értéke most már úgy számítható ki, mint a II. megoldásban.

⁴A hiba könnyebb megbecsülése céljából alkalmazzuk a

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ felbontást. Ugyanis, négyzetreemelésel}$$

$$2 + \sqrt{3} = x + y + 2\sqrt{xy}, \text{ tehát } x + y = 2 \text{ és } 2\sqrt{xy} = \sqrt{3}, \text{ ill. } xy = \frac{3}{4}.$$

x és y az $u^2 - 2u + \frac{3}{4} = 0$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Így

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \text{ és } \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}.$$

⁵ $\sqrt{5} = 2,236068\dots$