I. Megoldás. Segédtétel. Ha $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ *irreducibilis törtek és* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *akkor kell, hogy* $b=d$ *legyen.*

$\frac{a}{b}$ irreducibilis, ha a-nak és b-nek nincs közös osztója: $(a,b)\sim 1$[1]
Hasonlóan $(c,d)\sim 1$.

Ha $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, akkor

$$ad=bc,$$

azaz az ad szorzat osztható b-vel; minthogy $(a,b)\sim 1$ kell, hogy d legyen a b többszöröse.

Hasonlóan a bc szorzat osztható d-vel; azonban $(c,d)\sim 1$ kell, hogy b legyen d többszöröse.

A két megállapítás *csak úgy állhat* meg, ha $b=d$.

Legyenek már most $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ irreducibilis törtek úgy, hogy összegük és szorzatuk is egész szám. Tehát

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=E_1\ldots \tag{1}$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=E_2\ldots \tag{2}$$

1)-ből:

$$\frac{p}{q}=\frac{E_1s-r}{s},$$

ahol a jobboldal is irreducibilis tört; tehát $q=s$.
Tekintettel erre, 2)-ből $\quad \frac{pr}{q^2}=E_2,$

azaz pr a q^2 többszöröse. Minthogy azonban $(p,q)\sim 1$ és $(r,q)\sim 1$ kell, hogy $q=s=1$ legyen, tehát $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ egész számok.

Somogyi Antal (Gyakorló középiskola VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. A két racionális szám összege legyen p, szorzatuk q. A két szám mindegyike gyöke az

$$x^2-px+q=0$$

egyenletnek, ahol p és q egész számok. Tegyük fel, hogy ezen egyenletnek gyökei valósak és az egyik gyök $\frac{r}{s}$, ahol r és s relatív prímszámok.[2] Ha $\frac{r}{s}$ kielégíti az egyenletet, akkor

$$\left(\frac{r}{s}\right)^2-p\left(\frac{r}{s}\right)+q=0 \quad \text{vagy} \quad r^2=s(pr-qs).$$

Eszerint r^2 az s többszöröse. Azonban $(r,s)\sim 1$ és így $(r^2,s)\sim 1$, tehát ellenmondásra jutottunk. Az ellenmondás csak akkor szűnik meg, ha $s=1$, tehát, ha $\frac{r}{s}$ egész szám.

Kell tehát, hogy az

$$x^2-px+q=0$$

egyenlet valós és racionális gyökei egész számok legyenek, ha p és q egész számok.

Komlós János (Gyakorló középiskola, VIII. o. Pécs.)

Jegyzet. Általában: ha az

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

egyenletnek, amelyben a_1, a_2, …, a_{n-1} a_n együtthatók egész számok, míg x^n együtthatója 1, minden racionális gyöke egész szám. (L. Kürschák: Matematikai Versenytételek, 75. o.)

III. Megoldás. Ha a és b racionális számok, p és q egész számok úgy, hogy

$$a+b=p\ldots \tag{1}$$

$$ab=q\ldots \tag{2}$$

---

[1] a és b legn. közös osztója 1.

[2] $(r,s)\sim 1$; $\frac{r}{s}$ nem egyszerűsíthető, irreducibilis.

akkor $\quad (a-b)^2 = p^2 - 4q \quad$ szintén egész szám
és

$$a - b = \pm\sqrt{p^2 - 4q} = \pm k \ldots \tag{3}$$

ahol a jobboldal racionális, egész szám.

1)-ből és 3)-ból

$$a = \frac{p \pm k}{2}, \qquad b = \frac{p \mp k}{2}.$$

Ha p páratlan szám, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páratlan. Ha p páros, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páros. Eszerint a és b egész számok.

Berger Tibor (Fáy András g. VIII. o. Bp. IX.)