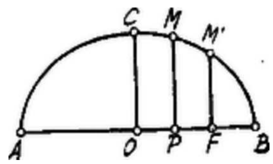
Az ellipszis egyenlete, főtengelyeire vonatkoztatva:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Az ellipszis nagy tengelye $AB=2a$. Az F gyújtópont az ellipszis M' pontjának vetülete és $OF=c$. A szóbanforgó kúp térfogata

$$V=\frac{\pi}{3}\overline{MP}^2\cdot PF=\pm\frac{\pi}{3}y^2(c-x).$$

A + előjel érvényes, ha M az A $(-a,0)$ ponttól az M' pontig mozog, tehát $-a\leqq x\leqq c$; azonban a $-$ előjel veendő, ha M az M'-től a B ig mozog, azaz $c<x\leqq a$.

Minthogy M az ellipszis pontja, $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$.

Így

$$V=\pm\frac{\pi}{3}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)(c-x).$$

Amint látjuk

$$V=0,\quad \text{ha}\quad x=\pm a\quad \text{és ha}\quad x=c.$$

Ha $x=\pm a$, akkor a kúp alapja, ha $x=c$, a kúp magassága válik zérussá. (Ha $x=\pm a$, a kúp egyenes vonaldarabbá zsugorodik össze, ha $x=c$, a kúp egy kör területébe megy át.)

V az x-nek folytonos függvénye és pozitív úgy a $(-a,c)$, mint a $(c,+a)$ intervallumban. Kell tehát, hogy ezen közökben legalább egy-egy maximuma legyen. Ha

$$f(x)=\pm(a^2-x^2)(c-x),$$

akkor

$$f'(x)=\pm(3x^2-2cx-a^2)$$

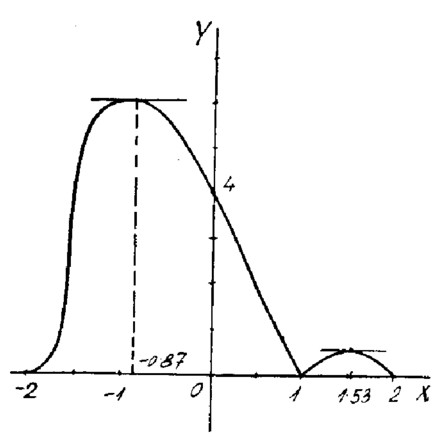
$f(x)$-nek és így V-nek csak ott lehet maximuma, ahol

$$g(x)=3x^2-2cx-a^2=0,\quad \text{tehát}\quad x=\frac{c\pm\sqrt{c^2+3a^2}}{3}.$$

Ezen egyenletnek két valós, ellenkező előjelű gyöke van. Minthogy

$$\begin{aligned}
g'(-a)&=3a^2+2ac-a^2=2a(a+c)>0\\
g'(c)&=3c^2-2c^2-a^2-=2(c^2-a^2)<0\quad (\text{mert } c<a)\\
g'(+a)&=3a^2-2ac-a^2=2a(a-c)>0,
\end{aligned}$$

az egyik gyök $-a$ és c, a másik c és $+a$ között van.



Eszerint V értékének változását jellemző táblázat:

x	$-a$		x_1		c		x_2		$+a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	max.	$\searrow$	0	$\nearrow$	max.	$\searrow$	0

Így

$$x_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 3a^2}}{3}, \quad x_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 3a^2}}{3}$$

.