I. Megoldás. Stewart-tételével (l. Xlll. évf. 193. o. — azaz 1937/3 193. old.)

$$\overline{CE}^2 \cdot c = a^2 \cdot \overline{AE} + b^2 \cdot \overline{EB} - \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot c$$

$$\overline{CE}^2 = a^2 \cdot \frac{AE}{c} + b^2 \frac{EB}{c} - \overline{AE} \cdot \overline{EB} \ldots \tag{1}$$

ahol $c = AB$. Feltevésünk szerint

$$AE : c = n : (m+n) \quad \text{és} \quad EB : c = m : (m+n).$$

Tekintettel ezekre, 1)-ből keletkezik:

$$\overline{CE}^2 = \frac{na^2}{m+n} + \frac{mb^2}{m+n} - \frac{mnc^2}{(m+n)^2} = \frac{(na^2+mb^2)(m+n) - mnc^2}{(m+n)^2} =$$

$$= \frac{n^2a^2 + m^2b^2 + mn(a^2+b^2-c^2)}{(m+n)^2} = \frac{(na+mb)^2 + mn(a^2-2ab+b^2-c^2)}{(m+n)^2} =$$

$$= \left(\frac{na+mb}{m+n}\right)^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}\left[c^2-(a-b)^2\right].$$

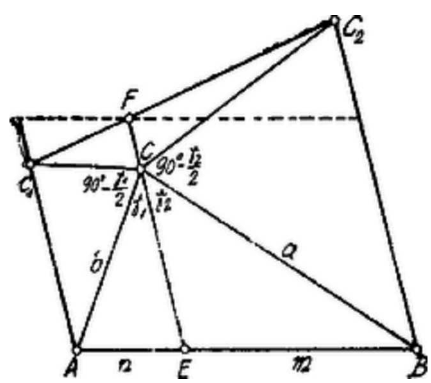
Minthogy a, b, c egy háromszög oldalai, $c^2 > (a-b)^2$, úgy hogy

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\left[c^2-(a-b)^2\right] > 0$$

tehát $$\overline{CE}^2 < \left(\frac{na+mb}{m+n}\right)^2 \quad \text{azaz} \quad CE < \frac{na+mb}{m+n}.$$

Czinczenheim József (Izr. g. VIII. o. Debreeen).

II. Megoldás. Húzzunk az A és B pontokon keresztül CE-vel párhuzamosakat, ábránk szerint; az előbbire mérjük fel $AC_1 = AC = b$, az utóbbira $BC_2 = BC = a$ távolságokat. Legyen már most $ACE\sphericalangle = \gamma_1$, $BCE\sphericalangle = \gamma_2$, $(\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma)$.



Minthogy $AC_1 \parallel CE$, a CAC_1 egyenlőszárú háromszögben $CAC_1\sphericalangle = \gamma_1$; a CBC_2 Δ-ben $CBC_2\sphericalangle = \gamma_2$. Ebből következik, hogy

$$ACC_1\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma_1}{2}, \quad BCC_2\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma_2}{2}.$$

Ha CC_1-t a C körül pozitív irányban forgatjuk, míg a CC_2 helyzetbe kerül, a forgást domború szög méri, t. i.

$$C_1CA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCC_2\sphericalangle =$$

$$= 90° - \frac{\gamma_1}{2} + \gamma + 90° - \frac{\gamma_2}{2} =$$

$$= 180° + \gamma - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 180° + \frac{\gamma}{2}.$$

Ebből következik, hogy az ABC_2CC_1 konkáv ötszög C_1C_2 átlója az ötszöget nem hasítja, ill. a C pont az ABC_2C_1 trapézen belül fekszik.

Hosszabbítsuk meg CE-t amíg C_1C_2-t az F pontban metszi, tehát $FE > CE$. A párhuzamos szelők törvényéből folyik, hogy

$$\frac{a-FE}{FE-b} \quad \text{és innen} \quad FE = \frac{na+mb}{m+n} > CE.$$

W. M.