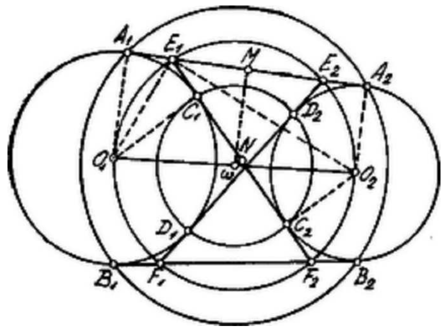
1^0. Az adott körök középpontja O_1, ill. O_2, sugaruk r_1 ill. r_2; a külső érintők érintési pontjai A_1, A_2, ill. B_1, B_2, a belsőké C_1, C_2 ill. D_1, D_2; a metszéspontok az A_1A_2 érintőn E_1, E_2, a B_1B_2 érintőn F_1 és F_2.



Az E_1 pontból az O_1 körhöz húzott érintők – E_1A_1 és E_1C_1 – szögét felezi E_1O_1; hasonlóan E_1O_2 felezi az O_2 körhöz húzott érintők – az E_1A_2 és E_1C_2 – szögét. A két szög egymásnak mellékszöge; tehát felezőik egymásra merőlegesek. Ebből következik, hogy E_1 az O_1O_2 átmérő fölé írt körön fekszik. Hasonló oknál fogva az E_2, F_1, F_2 pontok is ugyanezen körön feküsznek. Ezen kör középpontja ω, az $O_1O_2 = 2a$ centrális távolság felezőpontja; sugara $\varrho = a$.

2^0. $A_1O_1 \perp A_1A_2$ és $A_2O_2 \perp A_1A_2$. Ha tehát A_1A_2 felezőpontjában, M-ben A_1A_2-re merőlegest emelünk, ez az O_1O_2 felezőpontján megy keresztül, azaz A_1A_2 oly kör húrja, melynek középpontja ω. Ugyanezen körön feküsznek B_1 és B_2 is, minthogy B_1 az A_1, B_2 az A_2 szimmetrikus pontja az O_1O_2-re nézve.

Ismeretes, hogy

$$\overline{A_1A_2}^2 = (2a)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

tehát

$$A_1M^2 - \left(\frac{A_1A_2}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{r_1r_2}{2}\right)^2.$$

$M\omega$ az $A_1O_1O_2A_2$ trapéz középvonala: $M\omega = \dfrac{r_1+r_2}{2}$.

A külső érintők érintési pontjai köré irható kör sugara $\omega A_1 = \varrho_1$ és

$$\varrho_1^2 = \overline{A_1M}^2 + \overline{M\omega}^2 = a^2 - \left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 = a^2 + r_1r_2.$$

3^0 Az ω pontból a C_1C_2 belső érintőre bocsátott merőleges, ωN párhuzamos az O_1C_1 és O_2C_2 sugarakkal; amint ω az O_1O_2-t, úgy N *a* C_1C_2-t felezi. Tehát C_1C_2 egy, az ω körül írt kör húrja. Ugyanezen körön feküsznek D_1 és D_2 is, a C_1 és C_2 szimmetrikus pontjai az ω-n átmenő O_1O_2 egyenesre nézve. Ezen kör és sugarának kiszámításánál vegyük figyelembe, hogy

$$\overline{C_1C_2}^2 = (2a)^2 - (r_1+r_2)^2 \quad \text{és} \quad \overline{C_1N}^2 = \left(\frac{C_1C_2}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2.$$

Mivel $N\omega = \left|\dfrac{r_1+r_2}{2}\right|$, azért

$$\varrho_2^2 = \overline{C_1N}^2 + \overline{N\omega}^2 = a^2 - \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2 = a^2 - r_1r_2.$$

A szóbanforgó három koncentrikus kör sugara

$$\varrho = a, \quad \varrho_1 = a^2 + r_1r_2, \quad \varrho_2 = a^2 - r_1r_2.$$

Komlós János (Gr. Széchenyi István g. VII. o. Pécs.)

Jegyzet. Az előbbi eredményből kitűnik, hogy

$$\varrho = \sqrt{\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2}}$$