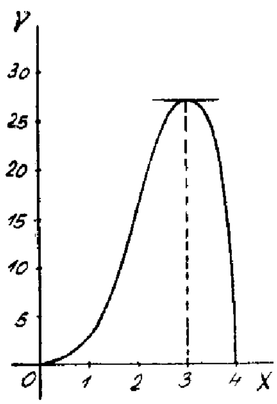
Független változónak tekintsük az egyenlőszárú háromszög magasságát; ezt jelölje x. Ha R a kör sugara, $0 \leqq x \leqq 2R$. A háromszög alapjának fele: x és $(2R-x)$ mértani középarányosa és így a háromszög területe

$$y = x\sqrt{x(2R-x)} = \sqrt{x^3(2R-x)}.$$

Nyilvánvaló, hogy y csak akkor valós, ha $0 \leqq x \leqq 2R$. Elegendő tehát, ha ezen közben az

$$f(x) = x^3(2R-x) = -x^4 + 2Rx^3$$

függvény változását vizsgáljuk.



$f(x) = 0$ (és $y = 0$), ha $x = 0$ és ha $x = 2R$. Ezen közben $f(x)$ mindenütt folytonos és pozitív; kell tehát, hogy ezen közben legalább egy maximuma legyen. Minthogy

$$f'(x) = -4x^3 + 6Rx^2 = 2x^2(3R-2x) = 0,$$

ha $x = 0$ és ha $x = \dfrac{3R}{2}$, az $x = \dfrac{3R}{2}$ helyen $f(x)$ függvénynek (és y-nak) maximuma van. Ezen helyen $f'(x)$ pozitív értékekből negatív értékekbe megy át, $f(x)$ változását tehát a következő táblázat jellemzi:

x	0		$\frac{3}{2}R$		$2R$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4$ max.	$\searrow$	0

Eszerint y ill. a^2 legnagyobb értéke: $\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 R^4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Ez a körbe írt egyenlőoldalú háromszög területe.

y minden értéket, mely 0 és $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ között van, kétszer vesz fel: egyszer a növekedés, egyszer a csökkenés közben. Ebből következik, hogy ha $a^2 \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, az

$$x\sqrt{x(2R-x)} = a^2 \quad \text{ill.} \quad x^3(2R-x) = a^4$$

egyenletnek két valós, pozitív megoldása van.

Kiegészítés. Az $f(x) = x^3(2R-x)$ függvénynek az $x = 0$ helyen inflexiós pontja van. $f(x) < 0$, ha $x < 0$ vagy ha $x > 2R$. Nyilvánvaló tehát, hogy, mivel $a^4 > 0$, az $f(x) = a^4$ egyenletnek nem lehet oly valós megoldása, amely szerint $x < 0$ vagy $x > 2R$.

Az

$$x^3(2R-x) = a^4 \quad \text{ill.} \quad g(x) \equiv x^4 - 2Rx^3 + a^4 = 0$$

egyenletnek a Descartes-féle jelszabály szerint legfeljebb két pozitív gyöke lehet. Ezek egyike 0 és $\frac{3}{2}R$, másik $\frac{3}{2}R$ és $2R$ között van, ha $a^2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.
Ugyanis

$$g(0) = a^4 > 0, \quad g\left(\frac{3}{2}R\right) = \left(\frac{3}{2}R\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4 + a^4 = a^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4 < 0.$$

és

$$g(2R) = 16R^4 - 16R^4 + a^4 > 0.$$