A szóbanforgó egyenlet $\cos^2\alpha = z$ helyettesítéssel

$$f(z) \equiv 4c^4(h^2+d^2)z^2 - 4c^2d^2(gh+c^2)z + g^2d^4 = 0, \tag{1}$$

ahol $g$, $h$, $c$, $d$ pozitív értékeket jelentenek. Az egyenlet discriminánsával megállapítottuk, hogy ezen egyenlet gyökei valósak, ha

$$d \leqq \frac{c}{g}\sqrt{c^2+2gh}. \tag{2}$$

Ki kell mutatnunk, hogy ekkor az $f(z)$ függvény zérushelyei 0 és 1 között vannak ($z = \cos^2\alpha > 0$). $f(z)$ a $z$-nek oly másodfokú függvénye, melyben $z^2$ együtthatója pozitív; tehát zérus helyei 0 és 1 között vannak, ha

$$f(0) > 0, \quad f(1) > 0 \quad \text{és} \quad 0 < \frac{z_1+z_2}{2} < 1 \ldots \tag{3}$$

ahol $z_1$ és $z_2$ az $f(z) = 0$ egyenlet gyökei, tehát

$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{4c^2d^2(gh+c^2)}{2\cdot 4c^4(h^2+d^2)} = \frac{d^2(gh+c^2)}{2c^2(h^2+d^2)} \ldots \tag{4}$$

Vizsgáljuk meg tehát, fennállanak-e ezen feltételek? Valóban $f(0) = g^2d^4 > 0$
és

$$f(1) = 4c^4(h^2+d^2) - 4c^2d^2(gh+c^2) + g^2d^4 = \left(2c^2h - gd^2\right)^2 > 0$$
$$\frac{d^2(gh+c^2)}{2c^2(h^2+d^2)} < 1 \quad \text{ha} \quad d^2(gh+c^2) < 2c^2(h^2+d^2),$$

ill.

$$d^2gh < 2c^2h^2 + c^2d^2 \ldots \tag{5}$$

Ha $gh < c^2$, az 5) egyenlőtlenség mindenkor fennáll. Ha azonban $gh > c^2$, akkor kell, hogy

$$d^2(gh-c^2) < 2c^2h^2 \quad \text{azaz} \quad d^2 < \frac{2c^2h^2}{gh-c^2} \ldots^1 \tag{5a}$$

legyen. Vegyük már most figyelembe, hogy $d^2$ legnagyobb értéke 2) szerint: $\frac{c^2}{g^2}(c^2+2gh)$; azonban

$$\frac{c^2}{g^2}(c^2+2gh) < \frac{2c^2h^2}{gh-c^2}, \quad \text{mert} \quad (c^2+2gh)(gh-c^2) < 2h^2g^2.$$

Ugyanis, végrehajtva a kijelölt műveleteket, keletkezik:

$$-(c^4+2c^2gh) < 0.$$

Ez pedig fennáll. Ha már most $d^2$ legnagyobb értéke is eleget tesz az 5$a$)-nak, kisebb értékei még inkább. Eszerint a 3) alatti feltételek mindenkor ki vannak elégítve és így

$$0 < z_1 < 1, \quad 0 < z_2 < 1.$$

[1] $gh - c^2 > 0$; az egyenlőség tartalma nem változik meg ha osztunk vele.