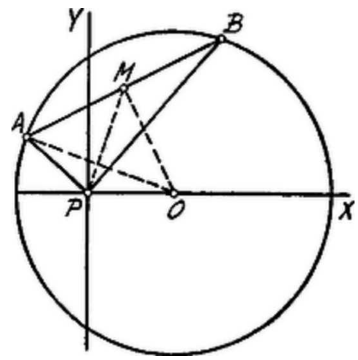
A kör középpontja legyen O. Derékszögű koordinátarendszerünk kezdőpontja legyen a P pont, a PO egyenes az X-tengely; $PO = a$. Ezen rendszerben a kör egyenlete

$$(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0\dots \tag{1}$$



Az A, B pontok koordinátái legyenek (x_1, y_1), ill. (x_2, y_2). Ezek eleget tesznek a következőknek:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 + a^2 - R^2 = 0\dots \tag{2}$$

$$x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 + a^2 - R^2 = 0\dots \tag{3}$$

Minthogy $PA \perp PB$,

$$x_2x_2 + y_1y_2 = 0\dots \tag{4}$$

Az AB húr M felező pontjának koordinátái:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}\dots \tag{5}$$

Az M pont mértani helyének egyenletét megkapjuk, ha a 2). 3), 4) és 5) egyenletekből kiküszöböljük (x_1, y_1), (x_2, y_2) koordinátákat. Ezen célból adjuk össze a 2), 3) és 4) egyenletek tagjait, a 4) tagjait 2)-vel szorozva. Így keletkezik:

$$(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 - 2a(x_1+x_2) + 2(a^2-R^2) = 0\dots \tag{6}$$

Tekintettel az 5) összefüggésekre:

$$4x^2 + 4y^2 - 4ax + 2(a^2-R^2) = 0, \text{ ill. } x^2 + y^2 - ax + \frac{1}{2}(a^2-R^2) = 0,$$

vagyis

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2R^2 - a^2}{4}\dots \tag{7}$$

Oly kör egyenletét kaptuk, melynek középpontja a PO távolság felezőpontja és sugara $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-a^2}$. Ezen kör az M pont mértani helye.

Krisztonosich Jenő (Szent-László g. VII. o. Bp. X.)

Jegyzet. Egyik megoldásban felmerül az a kérdés, hogy a 7) kör az adott O körön belül fekszik-e? Ezt eldönti azon körülmény, hogy

$$\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-a^2} < R \text{ és } O\omega = \frac{a}{2} < R - \frac{\sqrt{2R^2-a^2}}{2}\dots \tag{8}$$

ahol ω az M pont mértani helyéül szolgáló kör középpontja; $O\omega$, a két kör centrálisa kisebb a két sugár különbségénél. (A 8) alatti egyenlőtlenségek könnyen igazolhatók.)

II. Megoldás. Az OMA derékszögű háromszögben $\overline{OM}^2 + \overline{MA}^2 = R^2$. Az APB derékszögű háromszögben pedig $MP = MA$. így

$$\overline{MO}^2 + \overline{MP}^2 = R^2,$$

azaz az M pontra nézve két szilárd ponttól való távolságainak négyzetösszege állandó, tehát M mértani helye kör, melynek középpontja a PO távolság felezőpontja.

Harsányi János (ág. ev. g. VIII. o. Bp.)