A megadott függvény általában folytonos, kivéve az $x = -1$ helyen, ahol $y = -\infty$, még pedig bármely oldalról közelitünk az $x = -1$ helyhez.

Számítsuk ki a függvény első differenciálhányadosát. A függvényt szorzatnak tekintve,

$$y' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + x \cdot 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{(x+1)^3}(x^2+4x-1).$$

y' három helyen tűnik el, ha $x = -1$ és ha $x = -2 \pm \sqrt{5}$. (Utóbbi értékek az $x^2 + 4x - 1 = 0$ egyenlet gyökei.) Mindezen helyeken y' előjelét változtatja, tehát a függvénynek e helyeken szélső értékei vannak.

y' az $x = -1$ helyen végtelenné válik, még pedig $y' \to -\infty$, ha $x = -1 - \varepsilon$ és $\varepsilon \to 0$, de $y' \to +\infty$, ha $x = -1 + \varepsilon$ és $\varepsilon \to 0$. Az $x = -1$ egyenes a görbe aszimptotája.[1]

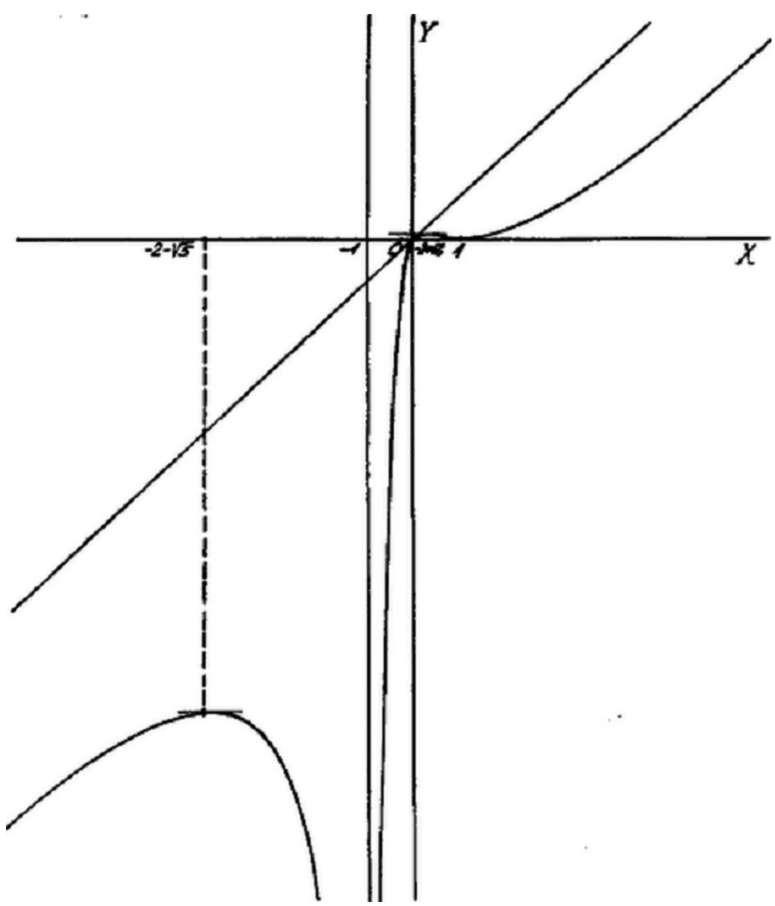
Azonban van egy másik aszimptotája is, az $y = x$ egyenes; ugyanis $y' = 1$, ha $x = \pm\infty$.

A függvény változását a következő táblázat jellemzi:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-1		$-2+\sqrt{5}$		$+1$		$+\infty$
y'	1	$+$	0	$-$	$\mp\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	max.: $-11{,}08$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	max: $0{,}09$	$\searrow$	min: 0	$\nearrow$	$+\infty$

A görbe megrajzolása szempontjából még figyelembe vesszük, hogy $y = 0$, ha $x = 0$; a görbe keresztül megy az origon és itt $y' = 1$, azaz a görbe érintője itt az $y = x$ egyenes.

Mindaddig, amíg $x < 0$, y is < 0, a görbe az X-tengely alatt fekszik; ha $x > 0$, akkor $y > 0$, kivéve az $x = 1$ helyen, ahol $y = 0$. Tehát, ha $x > 0$, a görbe az X-tengely felett fekszik, az $x = 1$ pontban érinti az X-tengelyt.



Egyébiránt a görbe az $y = x$ egyenes alatt fekszik; ugyanis, ha $x < 0$, akkor $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 > 1$, ha pedig $x > 0$, akkor $0 < \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1$. Előbbi esetben $|y| > |x|$, utóbbi esetben $0 \leq y < x$.

[1] ε pozitív számot jelent,

A görbének inflexiós pontja van ott, ahol

$$y'' = \frac{16x-8}{(x+1)^4} = 0, \quad \text{tehát az} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{helyen.}$$

Gállik István és Tóth Miklós (Premontrei g. VII. o. Gödöllő).