Legyen $OP = QM = x$, $OQ = PM = y$. A feladat követelménye:

(1) $$xy = a(x+y)\ldots$$

M a kör pontja tehát

(2) $$x^2 + y^2 = R^2\ldots$$

Ezen egyenletrendszer megoldása céljából írjuk:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2a(x+y).$$

Ha már most $x + y = u$, akkor 2) szerint

(3) $$u^2 - 2au - R^2 = 0\ldots$$

Ezen egyenletnek mindig két valós, ellenkező előjelű gyöke van; közülük csak a pozitívet vehetjük figyelembe, úgy hogy

(4) $$x + y = u = a + \sqrt{a^2 + R^2}\ldots$$

1)-ből pedig

(5) $$xy = v = au = a^2 + a\sqrt{a^2 + R^2}\ldots$$

Eszerint x és y a

(6) $$z^2 - uz + v = 0\ldots$$

egyenlet gyökei. Ezek valósak, ha $u^2 - 4v \geq 0$, ill.

$$u^2 - 4au \geq 0, \quad \text{tehát a} \quad u \geq 4a.$$

Ez bekövetkezik, ha

$$\sqrt{a^2 + R^2} \geq 3a, \quad \text{azaz} \quad R^2 \geq 8a^2.$$

A feladatnak megoldása eszerint akkor van, ha $2\sqrt{2}a \leq R$.

Alkalmazás. Ha $a = \frac{12}{35}R$, akkor

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{12}{35} < 1, \quad \text{mert } 24\sqrt{2} < 35. \quad \text{Ugyanis } 576 \cdot 2 = 1152 < 1225.$$

Most

$$a^2 + R^2 = R^2\left(\frac{144}{1225} + 1\right) = R^2\frac{1369}{1225} = \left(\frac{37}{35}R\right)^2.$$

Így

$$x + y = u = \frac{12}{35}R + \frac{37}{35}R = \frac{49}{35}R = \frac{7}{5}R.$$
$$xy = v = au = \frac{7}{5} \cdot \frac{12}{35}R^2 = \frac{12}{25}R^2.$$

x és y a

$$z^2 - \frac{7R}{5}z + \frac{12}{25}R^2 = 0$$

egyenlet gyökei. Innen $x = \frac{3}{5}R$, $y = \frac{4}{5}R$ vagy $x = \frac{4}{5}R$ és $y = \frac{3}{5}R$.

Gálfi János (Kossuth g. VIII. o. Cegléd.)