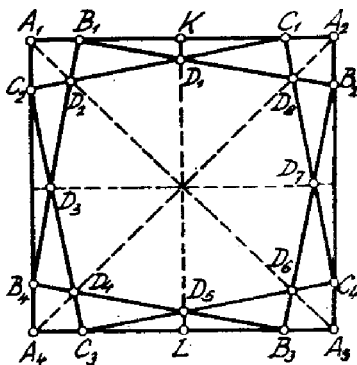


1<sup>0</sup>. Tetszőleges  $x$  távolságot mérve fel a jelzett módon a négyzet oldalaira, a  $B_1B_2$  és  $C_1C_2$  távolságok szimmetrikusak a négyzet  $KL$  szimmetria tengelyére nézve.  $B_1B_4$  és  $C_2C_1$  pedig az  $A_1A_2$  átlóra nézve s. í. t. Ebből következik, hogy a  $D_1, D_3, D_5, D_7$  csúcsok a négyzet szembenfekvő oldalait felező szimmetria tengelyeken, a  $D_2, D_4, D_6, D_8$  csúcsok az átlókon, mint a négyzet szimmetria tengelyein fekszenek.



Másrészt  $B_1B_4$  és  $C_1C_4$  is szimmetrikus a  $KL$ -re; ebből következik, hogy  $B_1D_1 = C_1D_1$ ,  $B_1D_2 = C_1D_8$  és  $D_1D_2 = D_1D_8$  s. í. t. – az átlók menti szimmetriát is figyelembe véve – a  $D_1D_2 \dots D_8$  összes oldalai egyenlők és<sup>1</sup> csúcsai a négyzet szimmetria-tengelyein fekszenek.

Hogy ezen négyszög szabályos is legyen, szükséges még és elegendő, hogy mindegyik szöge  $135^\circ$ -ú, tehát ábránk szerint  $2\alpha = 135^\circ$  ( $\alpha = 67,5^\circ$ ) legyen, más szóval: a  $D_1D_2 \dots D_8$  nyolcszög oldalai felett fekvő derékszögű háromszögekben a szögek  $45^\circ$ -osak (tehát  $B_1D_1 = B_1D_2 = C_2D_2 = C_2D_3 = \dots$  s. í. t) Minthogy  $C_2A_1D_2 \sphericalangle = 45^\circ$  és  $A_1D_2C_2 \sphericalangle = 67,5^\circ$ , kell, hogy  $A_1D_2C_2 \sphericalangle = 67,5^\circ = \alpha_1$  legyen, azaz  $A_1D_2 = A_1C_2 = x$ . A  $B_1C_1D_1$  egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek mindegyike  $45^\circ$  fele, azaz  $22,5$ . Kössük össze már most pl. a  $C_1$  pontot az  $O$  ponttal, a szabályos nyolcszög és a négyzet közös középpontjával.  $OC_1$  a  $D_1D_8$  alapon álló két egyenlőszárú háromszög –  $OD_1D_8$  és  $C_1D_1D_8 \Delta$  – csúcsait köti össze, tehát felezi ezen csúcsainál fekvő szöveget. Ebből következik, hogy

$$A_1OC_1 \sphericalangle = 45^\circ + 22,5^\circ = A_1C_1O \sphericalangle$$

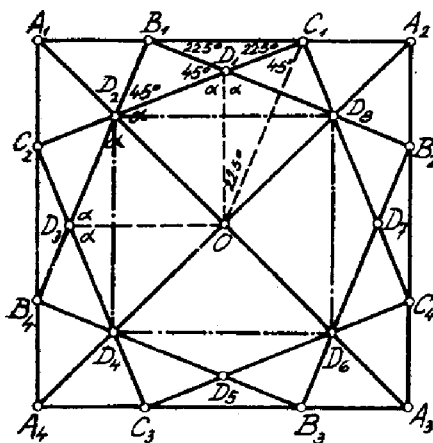
és így

$$A_1O = A_1C_1$$

azaz:

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2} = a - x, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) = A_1A_2 - A_1O.$$

Ezzel meg is kaptuk az  $x$ , ill. a szab.  $D_1 \dots D_8$  sokszög szerkesztését!



2<sup>0</sup>. Amint láttuk,  $A_1D_2 = x$ . Így  $OD_2 = A_1O - x = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$ , tehát  $OD_2 = a(\sqrt{2} - 1)$  és  $a_8 = D_1D_2 = 2OD_2 \sin 22,5^\circ = 2a(\sqrt{2} - 1) \sin 22,5^\circ$ .

A szabályos nyolcszög apothemája  $h = OD_2 \cos 22,5^\circ = a(\sqrt{2} - 1) \cos 22,5^\circ$ .

<sup>1</sup>A szögei azonban csak váltakozva egyenlők. Két szomszédos szög összege  $270^\circ$ .

Eszerint a  $D_1D_2 \dots D_8$  sokszög kerülete<sup>2</sup>, ill, területe

$$k_1 = 16a(\sqrt{2} - 1) \sin 22,5^\circ = 16a(\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = 8a\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$$

$$t_1 = 8 \cdot \frac{D_1D_2}{2}h = 4 \cdot 2a(\sqrt{2} - 1) \sin 22,5^\circ \cdot a(\sqrt{2} - 1) \cos 22,5^\circ = 4a^2(3 - 2\sqrt{2}) \sin 45^\circ =$$

$$= 2a^2(3 - 2\sqrt{2})\sqrt{2} = a^2(6\sqrt{2} - 8).$$

A nyolcszögnek az  $A_1A_3$  és  $A_2A_4$  átlókon fekvő csúcsai egy négyzetet határoznak meg,  $D_2D_4D_6D_8$ -at. Ezen négyzet félátlója  $OD_2 = a(\sqrt{2} - 1)$  és így ezen négyzet oldala, pl.

$$D_2D_4 = a' = a(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = a(2 - \sqrt{2}).$$

Ebből következik, hogy ezen négyzetbe, az előbbihez hasonló módon szerkesztett szabályos nyolcszög oldala az előbbi-nyolcszög oldalának  $(2 - \sqrt{2})$ -szerese s. i. t. Azaz: a feladatban körülírt módon keletkező szabályos nyolcszögek kerületei oly mértani haladvány tagjai, melynek hányadosa  $q = 2 - \sqrt{2}$ , területei pedig oly mértani haladványt alkotnak, melynek hányadosa  $q' = (2 - \sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$ . Látható, hogy  $0 < q < 1$  és  $0 < q' < 1$ ; tehát mindkét végtelen mértani sor összetartó.

Eszerint a végtelen sok nyolcszög kerületének összege :

$$K = \frac{k_1}{1 - q} = \frac{8a\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}}{1 - 2 + \sqrt{2}} = \frac{8a\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{8a(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} = 8a\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

A területek összege pedig

$$T = \frac{t_1}{1 - q'} = \frac{a^2(6\sqrt{2} - 8)}{1 - 6 + 4\sqrt{2}} = \frac{a^2(6\sqrt{2} - 8)}{4\sqrt{2} - 5} = \frac{a^2(6\sqrt{2} - 8)(4\sqrt{2} + 5)}{32 - 25} = \frac{a^2(8 - 2\sqrt{2})}{7}.$$

*Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre g. VII., Bp. XI.)*

---

<sup>2</sup> $\sin 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$  és  $(\sqrt{2} - 1)^2(2 - \sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 10 - 7\sqrt{2}$ . Tehát  $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{10 - 7\sqrt{2}}$ .