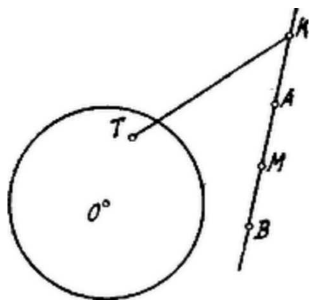
Az $A$, $B$ pontokon áthaladó valamely $\Gamma$ gömb a $G$ gömböt a $T$ pontban érintse. A két gömbnek közös érintősíkja a $T$ pontban az $AB$ egyenest a $K$ pontban messe. Kimutatjuk, hogy ezen $K$ szilárd pont (bármely $\Gamma$ érintési pontjához tartozó érintő sík a $K$ ponton megy keresztül).




Ugyanis ezen $K$ pontnak mindkét gömbre vonatkozó hatványa egyenlő, t. i. $\overline{KT}^2$. Még pedig a $G$ gömbre nézve, melynek középpontja $O$ és sugara $R$,

$$\overline{KT}^2 = \overline{KO}^2 - R^2.$$

A $\Gamma$ gömbre nézve

$$\begin{aligned}\overline{KT}^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KB} = (KM - AM)(KM + AM) = \\ = \overline{KM}^2 - \overline{AM}^2,\end{aligned}$$

ahol $M$ az $AB$ felező pontja. Eszerint

$$\overline{KO}^2 - R^2 = \overline{KM}^2 - \overline{AM}^2 \quad \text{ill.} \quad \overline{KO}^2 - \overline{KM}^2 = R^2 - \overline{AM}^2 = \text{constans}.$$

A $K$ pont mértani helye eszerint egy sík,[1] mely $OM$-re merőleges. Ezen sík az $AB$-t egy szilárd pontban metszi.

Ebből következik, hogy a $T$ pont mértani helye azon kör, melyet a $K$ pontból a gömbhöz húzott érintők érintéspontjai írnak le.

Ha $AB \perp OM$, akkor a $K$ pont a végtelenben van és a szóbanforgó mértani hely a $G$ gömb azon legnagyobb köre lesz, amely az $AB$-re, felezőpontjában merőlegesen állított sík metszése.

*Jegyzet.* A $K$ pontnak hatványa a $G$ gömbre és *bármely*, az $A$, $B$ pontokon átmenő $\Gamma$ gömbre nézve ugyanakkora. Ha oly $\Gamma$ gömböt veszünk, mely a $G$ gömböt metszi, akkor a $G$ és $\Gamma$ metszési síkja mértani helye azon pontoknak, amelyeknek hatványa a két gömbre nézve ugyanakkora; kell tehát, hogy ezen sík a $K$ ponton menjen keresztül.

Ezen alapon a $K$ pont megszerkeszthető.

[1] Azon pontok mértani helye a síkban, amelyekre nézve két adott ponttól való távolságuk négyzetének különbsége állandó, oly $g$ egyenes, mely a két adott pontot összekötő $e$ egyenesre merőleges. Ha ezt a $g$ egyenest az $e$ körül forgatjuk, akkor a szóbanforgó tulajdonsággal rendelkező pontok mértani helyét térben kaptuk meg.