Valamely függvénynek nincs szélső értéke, ha állandóan növekedik vagy fogy, tehát a differenciálhányadosa állandó előjelű, nem válik zérussá. Az adott esetben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-6)(x^2+4x+\lambda)-(2x+4)(x^2-6x+5)}{\left(x^2+4x+\lambda\right)^2} = \frac{10x^2+2(\lambda-5)x-6\lambda-20}{\left(x^2+4x+\lambda\right)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = y'$ nevezője nem lehet negatív, úgyhogy előjele a számláló előjelével egyezik meg. A számláló x másodfokú függvénye; ez állandó előjelű és nem válik zérussá, ha a discriminánsa negatív, tehát ha

$$D \equiv 4(\lambda-5)^2 + 40(6\lambda+20) < 0,$$
$$D < 0, \quad \text{ha} \quad (\lambda-5)^2 + 10(6\lambda+20) = \lambda^2 + 50\lambda + 225 = (\lambda+45)(\lambda+5) < 0.$$

Ez bekövetkezik akkor, ha $-45 < \lambda < -5$.

Ezen feltételnek $\lambda = -12$ megfelel. Ebben az esetben

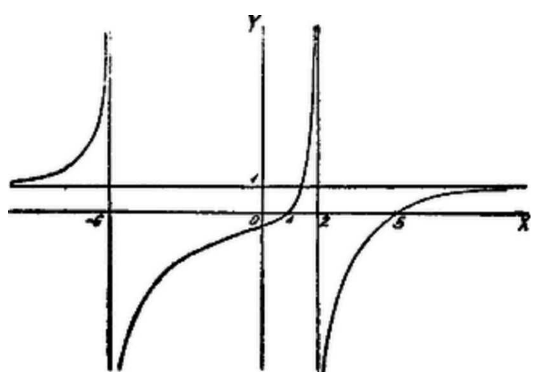
$$y' = \frac{10x^2-34x+50}{\left(x^2+4x-12\right)^2}.$$

A számlálóra nézve $D = 34^2 - 2000 < 0$; a számláló az x oly másodfokú függvénye, mely x minden valós értékénél pozitív. Így $y' > 0$, az y függvény állandóan növekedik.

$$y \;\text{ nevezője:}\; x^2+4x-12 = (x+6)(x-2).$$

Ebből következik, hogy az y függvény folytonossága két helyen megszűnik: az $x = -6$ és $x = +2$ helyeken. Növekedő x-ek irányában haladva ezen helyeken a függvény értéke $+\infty$-né válik, úgy hogy – pozitív ε-t tételezve fel –

$$\begin{array}{llll} \lim y = +\infty, & \text{ha } x = -6-\varepsilon & \text{és} & \varepsilon \to 0 \\ \lim y = -\infty, & \text{ha } x = -6+\varepsilon & \text{,,} & \text{,,} \\ \lim y = -\infty, & \text{ha } x = 2-\varepsilon & \text{,,} & \text{,,} \\ \lim y = +\infty, & \text{ha } x = 2+\varepsilon & \text{,,} & \text{,,}\;. \end{array}$$



A függvény görbének tehát három ága van: az első $-\infty$ és -6 között, a második -6 és $+2$, a harmadik $+2$ és $+\infty$ között. Az elsőben a függvény értéke növekedik $+1$-től $+\infty$-ig, a másodikban $-\infty$-től $+\infty$-ig, a harmadikban $-\infty$-től $+1$-ig. Ugyanis, ha $x \to \pm\infty$ akkor $\lim y = +1$.

Eszerint az $y = 1$ egyenes a görbe aszimptotája. Ugyancsak aszimptoták az $x = -6$ és $x = +2$ egyenesek is.

Hajnal Miklós (Izr. rg. VI. o. Bp.)