I. Megoldás. *a)* A kihúzott számokat jelöljék x_1, x_2, x_3. Ha ezeket egyszerre húzzuk ki, akkor nem lehetnek közöttük egyenlők. Ezeknek tehát két feltételt kell kielégíteniök:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 180 \ldots \tag{1}$$

$$\text{és} \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 \leq 90^\circ \ldots \tag{2}$$

Vizsgáljuk meg, hány értékcsoport felel meg ezen követelményeknek?
2) szerint bármelyik $x < 91$; tehát léteznek olyan Z_1, Z_2, Z_3 pozitív egész számok, amelyekre nézve

$$Z_1 = 91 - x_3, \qquad Z_2 = 91 - x_2, \qquad Z_3 = 91 - x_1,$$

ill.

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 273 - (x_1 + x_2 + x_3) = 93 \ldots \tag{3}$$

azonban ugyancsak 2) alapján kell, hogy

$$0 < Z_1 < Z_2 < Z_3 \leq 90 \ldots \tag{4}$$

legyen. Ha tekintetbe vesszük, hogy $Z_{1\min} = 1$, $Z_{2\min} = 2$, akkor a $Z_3 \leq 90^\circ$ korlátozás összhangban van a 3) egyenlet követelményével és nem változtatja meg a 3) egyenlet megoldásainak számát, úgy hogy ezt nem kell külön kiemelnünk.

Mivel minden Z-hez tartozik egy olyan x, mely eleget tesz az 1) és 2) feltételeknek, azért elegendő, ha keressük a

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 93$$

egyenlet pozitív egész megoldásainak számát, úgy hogy

$$0 < Z_1 < Z_2 < Z_3.$$

Ezt a feladatot a XII. évf. 1184. feladatában oldottuk meg (XII. évf. 232. o.—1936/4. 232. old.). Eszerint a megoldások száma:[1]

$$\frac{1}{6}\left\{\binom{93-1}{2} - 3\left[\frac{93-1}{2}\right] + 2\left[\frac{93}{2}\right] - 2\left[\frac{93-1}{3}\right]\right\} =$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\binom{92}{2} - 3\cdot 46 + 2\cdot 31 - 2\cdot 30\right\} = 675.$$

Ugyanennyi megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 = 180 \quad (\text{ha} \;\; 0 < x_1 < x_2 < x_3 \leq 90)$$

egyenletnek is.

Ha nem vagyunk tekintettel a sorrendre, akkor a kiszámítandó valószínűség szempontjából a kedvező esetek száma 675, míg a lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotott ismétlés nélküli harmadoszt. kombinációk száma, $\binom{90}{3}$. Eszerint

$$v_1 = \frac{675}{\binom{90}{3}} = \frac{675\cdot 3!}{90\cdot 89\cdot 88} = \frac{45}{7832} = 0{,}005745.$$

Ha a sorrendre is tekintettel vagyunk, akkor a kedvező esetek száma: $675\cdot 3!$ A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotott ismétlés nélküli harmadoszt. variációk száma $\binom{90}{3}3!$ A valószínűség értéke most is az, mint előbb.

b) Ha a kihúzott lapot visszatesszük, akkor a kihúzottak között az 1) feltételnek megfelelőleg 45, 46, …59, 61, …89 számok kétszer is előfordulhatnak, a 60 háromszor is, azaz 45 esetben lehet ismétlés; a kedvező esetek száma, ha nem vagyunk tekintettel a sorrendre $675 + 45 = 720$. A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotható ismétléses harmadoszt. kombinációk száma, azaz $\binom{92}{3}$. A keresett valószínűség

$$v_2 = \frac{720}{\binom{92}{3}} = \frac{720\cdot 3!}{92\cdot 91\cdot 90} = \frac{70}{92\cdot 91\cdot 15} = \frac{12}{91\cdot 23} = \frac{12}{2093} = 0{,}005733\ldots$$

Ha tekintettel vagyunk a sorrendre is, akkor a kedvező esetek száma:

$$675\cdot 3! + 44\frac{3!}{2!} + 1 = 4183.$$

---

[1] $\left[\frac{k}{l}\right]$ jel a $\frac{k}{l}$ törtben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

A lehetséges esetek száma a 90 elemből alkotható ismétléses variációk száma t. i. 90^3. Most

$$v_2' = \frac{4183}{90^3} = 0{,}000573\ldots$$

Vajda József (Faludi Ferenc rg. VIII. o. Szombathely).

Jegyzet. Ezen különben dicséretreméltó megoldásról feltételezhetjük, hogy a versenyen aligha jön létre. Hogy lássuk, milyen megoldás az, amit a versenyen is ki lehet hozni, közöljük a következő megoldást is. Ebben azonban csak az *a)* kérdésre szorítkozunk, feltételezve azt, hogy a kihúzott számok sorrendjére nem vagyunk figyelemmel.

II. Megoldás. Jelentsék az x, y, z egész számok a háromszög szögeit úgy, hogy $0 < x < y < z \leq 90°$. Ekkor $x + y + z = 180$.

Minthogy $y < z \leq 90$, azért $x + 2y < 180$, de $x + y \geq 90$. Ezen feltételeket szem előtt tartva, a következő kedvező esetekhez jutunk:

$$\begin{array}{llllll}
x=1; & y & \text{lehetséges} & \text{értékei} & : & 89 \\
x=2; & „ & „ & „ & : & 88 \\
x=3; & „ & „ & „ & : & 87,\ 88 \\
x=4; & „ & „ & „ & : & 86,\ 87 \\
x=5; & „ & „ & „ & : & 85,\ 86,\ 87 \\
x=6; & „ & „ & „ & : & 84,\ 85,\ 86 \\
x=7; & „ & „ & „ & : & 83,\ 84,\ 85,\ 86 \\
\ldots & & \ldots & & & \\
\ldots & & \ldots & & & \\
x=43; & y & \text{lehetséges} & \text{értékei} & : & 47,\ 48,\ \ldots\ 67,\ 68\ \ (22\ \text{eset}) \\
x=44; & „ & „ & „ & : & 46,\ 47,\ \ldots\ 66,\ 67\ \ (22\ „\ ) \\
x=45; & „ & „ & „ & : & 46,\ 47,\ \ldots\ 66,\ 67\ \ (22\ „\ ) \\
x=46; & „ & „ & „ & : & 47,\ 48,\ \ldots\ 66\ \ (20\ „\ ) \\
x=47; & „ & „ & „ & : & 48,\ 49,\ \ldots\ 66\ \ (19\ „\ ) \\
x=48; & „ & „ & „ & : & 49,\ 50,\ \ldots\ 65\ \ (17\ „\ ) \\
\ldots & & \ldots & & & \\
\ldots & & \ldots & & & \\
x=57; & y & \text{lehetséges} & \text{értékei} & : & 58,\ 59,\ 60,\ 61 \\
x=58; & „ & „ & „ & : & 59,\ 60 \\
x=59; & „ & „ & „ & : & 60.
\end{array}$$

($x = 60$ már nem lehetséges $y = 61$, $z = 62$ miatt).

A feltételeknek megfelelő értékcsoportok száma megegyezik y lehetséges értékeinek számával és ez:

$$\begin{gathered}
2+4+6+8+\ldots+42+44+22+20+19+17+16+\ldots+5+4+2+1= \\
=2(1+2+3+\ldots+21+22)+22+(39+33+27+\ldots+9+3)= \\
=506+22+147=675.
\end{gathered}$$

A kedvező esetek száma eszerint 675.

A lehetséges esetek száma: $\binom{90}{3}$ és $v = \frac{675}{\binom{90}{3}} = \frac{45}{7832}$.

Lóránd Endre (Br. Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp.VI.)

Jegyzet. Ezen – inkább intuitív – megoldást rendszerbe foglalja a következő.

III. Megoldás. A kedvező eseteket, számuknak könnyebb meghatározása végett, osszuk két csoportba. Az elsőbe helyezzük azokat, amelyekben az első (legkisebb) elem sorban 1, 2, …43, 44, a második csoportba azokat, amelyekben az első elem 45, 46, …89, 90.

1. Legyen tehát az első elem k úgy, hogy $0 < k < 45$. Az ehhez tartozó kedvező kombinációk közül a legalacsonyabb rangú:

$$k, \quad 90-k, \quad 90.$$

(A második elem nem lehet kisebb, mint $90-k$, mert akkor a harmadiknak 90-nél nagyobbnak kell lennie; ez pedig nem fordulhat elő.) A következő kedvező kombinációk

$$\begin{gathered}
k, \quad 90-k+1, \quad 90-1 \\
k, \quad 90-k+2, \quad 90-2. \\
\vdots
\end{gathered}$$

A legmagasabb rangú kedvező kombináció
$$k, \quad 90-k+x, \quad 90-x$$
ahol
$$90-k+x<90-x \quad \text{azaz} \quad x<\frac{k}{2}.$$

Tehát aszerint, amint k páros, vagy páratlan, legmagasabb rangú kedvező kombináció:
$$k, \quad 90-k+\left(\frac{k}{2}-1\right), \quad 90-\left(\frac{k}{2}-1\right) \quad \text{ill.} \quad k, \quad 90-k+\frac{k-1}{2}, \quad 90-\frac{k-1}{2}.$$

Amint látjuk, adott k mellett $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\left[\frac{k-1}{2}\right]$ szolgáltatják a kedvező eseteket. Ezeknek száma tehát $\left[\frac{k+1}{2}\right]$.

$\left[\frac{k+1}{2}\right]$ értéke két egymásután következő páratlan és páros számra (1 és 2, 3 és 4 ... 43 és 44) ugyanakkora. Ha $k=1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots 43,\ 44$, akkor
$$\sum_{k=1}^{44}\left[\frac{k+1}{2}\right]=2(1+2+\ldots+22)=2\frac{1+22}{2}\cdot 22=506.$$

2. Legyen már most az első elem $45+l$, ahol $0 \leq l \leq 45$. Az ehhez tartozó kedvező kombinációk:
$$\begin{gathered}45+l, \quad 45+l+1, \quad 90-(2l+1)\\ 45+l, \quad 45+l+2. \quad 90-(2l+2).\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{gathered}$$

A legmagasabb rangú $45+l,\ 45+l+x,\ 90-(2l+x)$
ahol azonban $45+l+x<90-(2l+x)$, azaz $0<x<\frac{45-3l}{2}$.

Ebből első sorban következik, hogy $45>3l$, tehát $l<15$, azaz csak $l=0,\ 1,\ 2, \ldots 14$ lehetséges. (Az első elem legfeljebb 59.)

A legmagasabb rangú kombináció adott l mellett,
$$\begin{array}{lll}\text{ha } l \text{ páros} & 45+l, \quad 45+l+\left(\frac{45-3l}{2}-\frac{1}{2}\right), & 90-\left[2l+\left(\frac{45-3l}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]\\ \text{ha } l \text{ páratlan} & 45+l, \quad 45+l+\left(\frac{45-3l}{2}-1\right), & 90-\left[2l+\left(\frac{45-3l}{2}-1\right)\right]\end{array}$$

Eszerint,
$$\begin{array}{ll}\text{ha } l \text{ páros,} & x=1,\ 2,\ \ldots\ \frac{44-3l}{2},\\ \text{ha } l \text{ páratlan,} & x=1,\ 2,\ \ldots\ \frac{43-3l}{2}.\end{array}$$

Ugyanennyi tehát a $45+l$ első elemhez tartozó kedvező kombinációk száma is.

Láttuk, hogy $l=0,\ 1,\ 2, \ldots 14$ lehet. Ezek közül l páros értékei: $0,\ 2,\ 4, \ldots 12,\ 14$, összesen 8 eset, amelyben $x=\frac{44-3l}{2}$. Ezen x értékek számtani haladványt alkotnak, amelyben az első tag: $\frac{44}{2}$, az utolsó tag 1, tehát összegük
$$S_1=8\cdot\frac{22+1}{2}=4\cdot 23=92.$$

l páratlan értékei $1,\ 3,\ \ldots,\ 11,\ 13$, összesen 7 eset, amelyben $x=\frac{43-3l}{2}$.
Ezen x értékek között az első tag: $\frac{40}{2}$, az utolsó tag $\frac{4}{2}$; összegük
$$S_2=7\frac{20+2}{2}=77.$$

A kedvező kombinációk összes száma eszerint
$$506+92+77=675.$$

Weisz Alfréd (Bolyai reál VII. o. Bp. V.)