I. Megoldás. Kiindulunk abból, hogy

$$n^{18}-n^{12}-n^{8}+n^{2}=n^{7}(n^{11}-n)-n(n^{11}-n)=(n^{7}-n)(n^{11}-n).$$

A kis Fermat-tétel szerint, ha p prímszám és n tetszőleges egész szám, akkor n^p-n osztható p-vel. Eszerint

$$n^7-n \text{ osztható 7-tel,} \quad n^{11}-n \text{ pedig 11-gyel}$$

tehát szorzatuk osztható 77-tel.

Csada Imre (Korvin Mátyás g. VII. o. Mátyásföld)

II. Megoldás. 1°. $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)$ osztható 7-tel. Ha n a 7 többszöröse, az oszthatóság közvetlenül látható.

Ha n nem többszöröse 7-nek, akkor

$$n=7k\pm1, \quad n=7k\pm2, \quad n=7k\pm3.$$

Az $n=7k+1$, $n=7k+2$, $n=7k-3$ esetekben

$$n^3=7M+1, \quad \text{tehát} \quad n^3-1=7M.$$[1]

Az $n=7k-1$, $n=7k-2$, $n=7k+3$ esetekben

$$n^3=7M-1, \quad \text{tehát} \quad n^3+1=7M.$$

2°. $n^{11}-n=n(n^{10}-1)=n(n^5-1)(n^5+1)$ osztható 11-gyel. Ha n a 11 többszöröse, akkor az oszthatóság közvetlenül világos. Ha n nem többszöröse 11-nek, akkor

$$n=11k\pm1, \quad 11k\pm2, \quad 11k\pm3, \quad 11k\pm4, \quad 11k\pm5.$$

Az $n=11k+1$, $11k-2$, $11k+3$, $11k+4$, $11k+5$ esetekben

$$n^5=11M+1, \quad \text{tehát} \quad n^5-1=11M.$$

Az $n=11k-1$, $11k+2$, $11k-3$, $11k-4$, $11k-5$ esetekben

$$n^5=11M-1, \quad \text{tehát} \quad n^5+1=11M.$$[2]

Marosán Zoltán (Kossuth Lajos rg. VII. o. Pestszenterzsébet)

---

[1] T. i. $(\pm1)^3=\pm1$; $+2^3=+8$, tehát $+8-1$ és $(-2)^3=-8$, tehát $-8+1$; $(+3)^3=27=28-1$, tehát $27+1$ és $(-3)^3=-27$, tehát $-27-1$ lesz 7 többszöröse.

[2] $2^5=32=33-1$; $3^5=243=2\cdot11^2+1$; $4^5=1024=93\cdot11+1$; $5^5=3125=11\,m+1$.