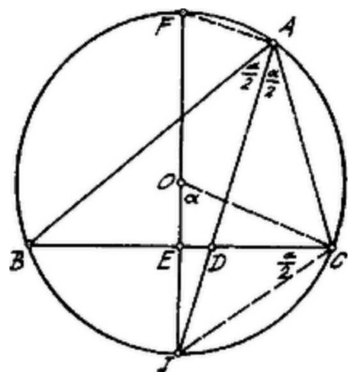
I. Megoldás. Számításunkat rendezzük be úgy, hogy ezzel egyszersmind a következő feladatban kijelölt szerkesztést is elvégezhessük.

Adva lévén az a oldal és az α szög, megszerkesztjük a keresett háromszög köré írt kört, melynek a BC húrra merőleges átmérője, ábránk szerint $IF = 2OI = 2OC = \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.



Az $AD = l_\alpha$ szögfelező keresztülmegy a $\widehat{BC}$ ív I felezőpontján. Az $ADEF$ négyszögnek két szembenfekvő szöge, az A és E csúcsoknál, derékszög, tehát $ADEF$ húrnégyszög. Ebből következik, hogy

(1) $$\overline{IA}\cdot\overline{ID} = \overline{IE}\cdot\overline{IF}\ldots$$

Adataink szerint

(2) $$IA - ID = l_\alpha\ldots$$

Az ICF derékszögű háromszögben

$$\overline{IE}\cdot\overline{IF} = \overline{IC}^2$$

tehát

(3) $$\overline{IA}\cdot\overline{ID} = \overline{IC}^2\ldots$$

A 2) és 3) egyenletekből[1]

(4) $$ID = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \overline{IC}^2} - \frac{l}{2}\ldots$$

(5) $$IA = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \overline{IC}^2} + \frac{l}{2}\ldots$$

ahol

$$IC = \frac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Ezek után áttérhetünk az $AB = c$ és $AC = b$ oldalak kiszámítására.
Minthogy
az ABI Δ-ből:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2} = \overline{BI}^2$$

az ACI Δ-ből:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2} = \overline{CI}^2$$

továbbá $BI = CI$, nyilvánvaló, hogy $AB = c$ és $AC = b$ az

(6) $$x^2 - 2x\cdot IA\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \overline{IA}^2 - \overline{IC}^2 = 0\ldots$$

egyenlet gyökei. Minthogy 5) szerint (és a geometriai jelentést is tekintve) $IA \geq IC$, a 6) egyenlet gyökei, ha valósak, egyszersmind pozitívek, határesetben az egyik gyök zérus.

[1] A következőkben az l melletti α indexet a rövidség kedvéért elhagyjuk.

A gyökök valósak, ha

$$\overline{IA}^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-(\overline{IA}^2-\overline{IC}^2)=\overline{IC}^2-\overline{IA}^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\geq 0,\quad \text{ill.}\quad IC\geq IA\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Helyettesítve IC értékét: $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\geq IA\sin\dfrac{\alpha}{2}$, tehát $IA\geq\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Valóban az IA húr kisebb tartozik lenni a kör átmérőjénél.
Már most:

$$\sqrt{\frac{l^2}{4}+\frac{a^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}+\frac{l}{2}\leq\frac{a}{\sin\alpha},$$

$$\frac{l^2}{4}+\frac{a^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\leq\left(\frac{a}{\sin\alpha}-\frac{l}{2}\right)^2,\qquad \frac{a^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\leq\frac{a^2}{\sin^2\alpha}-\frac{al}{\sin\alpha}.$$

Ezen egyenlőtlenséget l szerint megoldva

$$l\leq\frac{a}{\sin\alpha}-\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.^2$$

Azonban $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=IE$, tehát $l\leq IF-IE$
azaz

$$l_\alpha\leq EF.$$

Ez a feltétele annak, hogy feladatunknak legyen megoldása. A 6) egyenletből

$$x=IA\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}-\overline{IA}^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

x egyik értéke b, a másik értéke c. Az IA értéke 5) alatt van megadva.

II. Megoldás. A cosinus-tétellel

(1) $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}\dots$$

Az l szögfelező által alkotott két háromszög területének összege az egész háromszög területével egyenlő, azaz

(2) $$\frac{bl}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{cl}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{bc}{2}\sin\alpha\quad\text{és innen}\quad b+c=\frac{2bc}{l}\cos\frac{\alpha}{2}\dots$$

2) alapján $b+c$ értékét 1)-be helyettesítve, keletkezik

(3) $$4b^2c^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-4bcl^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-a^2l^2=0\dots$$

Ezen (bc)-re másodfokú egyenletnek gyökei mindig valósak és ellenkező előjelűek; közülük csak a pozitív felel meg, úgy hogy

(4) $$bc=\frac{l^2\cos\dfrac{\alpha}{2}+l\sqrt{l^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+a^2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\dots$$

és így

(5) $$b+c=l\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}\dots$$

5) szerint $b+c>a$. Már most b és c egy másodfokú egyenlet gyökei. A rövidség kedvéért legyen

$$b+c=u\quad\text{és}\quad bc=vu,\quad\text{ahol}\quad v=\frac{l}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

[2] Ezen kifejezés $l\leq\dfrac{a}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$ alakra hozható.

Ekkor
$$b=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4vu}}{2},\quad c=\frac{u\mp\sqrt{u^2-4vu}}{2}.$$
A gyökök valósak, ha $u\geq 4v$, azaz, ha
$$l\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}\geq\frac{2l}{\cos\frac{\alpha}{2}},\quad \text{ill.}\quad \sqrt{l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2}\geq\frac{2l}{\cos\frac{\alpha}{2}}-l\cos\frac{\alpha}{2}.$$
Minthogy $\dfrac{2l}{\cos\frac{\alpha}{2}}>l\cos\dfrac{\alpha}{2}$, négyzetre emelhetünk és így
$$l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2\geq\frac{4l^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-4l^2+l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\quad \text{vagyis}\quad 4l^2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\leq a^2,$$
tehát
$$l\leq\frac{a}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}$$
a feltétele annak, hogy legyen valós megoldás.

Bencze József (Bencés g. VIII. o. Kőszeg).