Az A pont koordinátái legyenek α, β, és a változó OB egyenes egyenlete

(1) $$y - mx = 0\ldots$$

A B pont ordinátája[1] az $y^2 = \dfrac{2py}{m}$ egyenletből: $\dfrac{2p}{m}$. Ugyanez a C pont ordinátája is. Az AC egyenes egyenlete:

(2) $$y - \beta = \frac{\frac{2p}{m} - \beta}{-\alpha}(x - \alpha)\ldots$$

Az 1) és 2) egyenesek M metszéspontjának koordinátáit, mint m függvényeit számíthatjuk ki az 1) és 2) egyenletekből. Ha pedig e két egyenletből kiküszöböljük m-t, az M pont koordinátái között kapunk egy egyenletet, az M pont mértani helyének egyenletét. 1)-ből $m = \dfrac{y}{x}$; ha ezt 2)-be helyettesítjük és rendezünk, keletkezik:

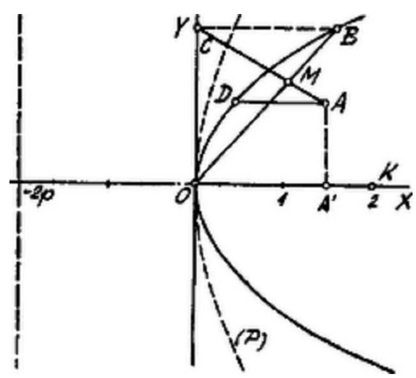
(3) $$ay(y - \beta) + (2px - \beta y)(x - \alpha) = 0.$$

ill.

(3a) $$2px^2 - \beta xy + \alpha y^2 - 2p\alpha x = 0\ldots$$

Eszerint az M pont mértani helye kúpszelet. A 3)-ból látjuk, hogy keresztül megy az $(x = \alpha,\ y = \beta)$, azaz az A ponton, az $(x = \alpha,\ y = 0)$ ponton – ez az A vetülete az X-tengelyen, az $\left(y = \beta,\quad x = \dfrac{\beta^2}{2p}\right)$ ponton, – azon a D ponton, amelyben az X-tengellyel párhuzamos AD metszi az adott parabolát.

A 3a)-ból pedig látjuk, hogy a kúpszelet az Y-tengelyt az O pontban érinti; ugyanis ha $x = 0$, akkor $\alpha y^2 = 0$, azaz $y^2 = 0$: a kúpszelet két összeeső pontban metszi az Y-tengelyt.



Hogy a kúpszelet nemét megállapítsuk, vizsgáljuk elsősorban a másodfokú tagok együtthatóiból alkotott kifejezést:

(4) $$\delta = 2p\alpha - \frac{\beta^2}{4}\ldots$$

I. Parabolát kapunk, ha $\delta = 0$, azaz ha $\beta^2 = 8p\alpha$. Ez annyit jelent, hogy ha az A pont az $y^2 = 8px$ parabolának pontja, az M pont mértani helye parabola. Ha az A pont O-ba kerül $(\alpha = 0,\ \beta = 0)$, akkor a 3a)-ból $2px^2 = 0$ keletkezik, azaz $x^2 = 0$: az Y-tengellyel összeeső két egyenessel van dolgunk.

Az $y^2 = 8px$ parabola jele legyen (P). A (P) pontjainak ordinátái az $y^2 = 2px$ pontjaihoz tartozó ordináták kétszeresei.

II. Ellipszist kapunk, ha $\delta > 0$, tehát ha az A pont a (P) parabolán belül fekszik.[2] Az ellipszisből kör lesz, ha $\beta = 0$ és $\alpha = 2p$, azaz az A pont az X tengelynek $(2p,\,0)$ koordinátákhoz tartozó K pontja. $(2p = 4OF)$.

III. Hiperbolát kapunk, ha $\delta > 0$, tehát ha az A pont a (P) parabolán kívül fekszik. Az Y-tengelyen fekvő A pontokra nézve $\alpha = 0$ és a hiperbola ekkor

$$x(2px - \beta y) = 0$$

egyenespárrá fajul.

Egyenlőoldalú lesz a hiperbola, ha $\alpha = -2p$, ha az A pont az X-tengelyre merőleges $x = -2p$ egyenesen fut végig.

Vajda József (Faludi Ferenc rg. VIII. o. Szombathely.)

[1] az $y^2 = 2px$ és $y - mx = 0$ egyenletekből x kiküszöbölése után.

[2] Ezen ellipszis mindig valós ellipszis; ugyanis az ellipszis az x minden értéke mellett az X tengelyt két pontban metszi. 3)-ból, ha $y = 0$, akkor $2px(x - \alpha) = 0$; a két metszéspont egyike szilárd pont, t. i. $x = 0$ (az origo), a másik változó: $x = \alpha$ abcissához tartozik; ez az A pont vetülete az X-tengelyen. – Azt is megállapíthatjuk, hogy az origón átmenő bármely egyenes – az origón kívül még egy pontban metszi az ellipszist.