A szóbanforgó egyenlet megoldásának geometriai értelme az, hogy keressük az

$$1)\ldots y=\sqrt{2x^2+2x-m},\quad \text{az}\quad m\quad \text{értékével változó görbének és az}$$
$$2)\ldots y=x-2\quad \text{szilárd egyenesnek közös pontjait.}$$

A 2) egyenes keresztülmegy az X-tengely (2, 0) pontján és 45°-ú szög alatt hajlik az X-tengelyhez.

Az 1) görbe az

$$y^2=2x^2+2x-m\ldots \tag{3}$$

hiperbolának az X-tengely feletti része. Ezen hiperbolának az X-tengely egyik *szimmetriatengelye*, amely valós tengely abban az esetben, ha a hiperbola metszi, azaz ha a

$$2x^2+2x-m=0\ldots \tag{4}$$

egyenletnek valós gyökei vannak. E gyökök valósak, ha

$$4+8m\geq 0,\quad \text{ill.}\quad m\geq -\frac{1}{2}\ldots \tag{5}$$

Vizsgáljuk tehát azon hiperbolákat, amelyekre nézve az 5) fennáll. A 3) egyenletet

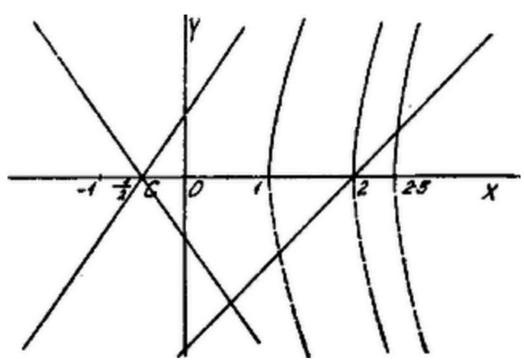
$$2x^2+2x-y^2=m,\quad \text{ill.}\quad 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=m+\frac{1}{2}\ldots \tag{6}$$

alakban írva, kiolvashatjuk, hogy a hiperbola középpontja – az m bármely értéke mellett – az X-tengelyen fekszik, $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$ koordinátákhoz tartozik. (Az ábrán C.)

Valamennyi hiperbolának közös aszimptotái vannak; ezek az

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\quad \text{és}\quad y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\ldots \tag{7}$$

egyenesek. Ha $m=-\frac{1}{2}$, akkor a hiperbola éppen a 7) alatti egyenespárrá fajul.



A hiperboláknak azonban az X-tengelyen változó csúcspontjuk – és ennek megfelelőleg változó tengelyhosszuk – van, tehát változik az alakjuk. A csúcspontok koordinátáit a 4) egyenlet gyökei szolgáltatják. Ezeknek értéke:

$$x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+2m}\right)\ldots \tag{8}$$

Az $y=x-2$ egyenes a hiperbola azon ágának X tengely feletti részét metszi, amelynek csúcspontja a középponttól jobbra van, tehát abscissája

$$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+2m}).$$

Mindaddig, amíg ezen abscissa <2, az egyenes nem metszheti a hiperbola előbb meghatározott részét. Metszéspontjuk akkor van,

ha $\quad \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+2m})\geqq 2$, tehát ha $m\geq 12$. (L. az 1275-ben).

$m=12$ mellett a hiperbola csúcspontja az $(x=2,\ y=0)$ pont. Az egyenes itt metszi a görbét.

Ha $m>12$, a metszéspont $x>2$ abscissához tartozik.

Krisztonosich Jenő (Szent László rg. VII. o. Bp. X.)

Kiegészítés. Ha $-\frac{1}{2}\leq m<12$, akkor a 2) egyenes a 6) hiperbola mindkét ágát az X-tengely alatt egy-egy pontban metszi.

Ha $m>12$, akkor csak az egyik metszéspont van az X-tengely alatt (a hiperbola másik ágán).

Ha $m<-\frac{1}{2}$, ekkor az X tengely a hiperbola képzetes tengelye; a valós tengely az X-tengelyre merőleges az $(x=-\frac{1}{2}, y=0)$ pontban. Ezen hiperbolának egyik ágát, az X tengely alattit, metszi a 2) egyenes két pontban.