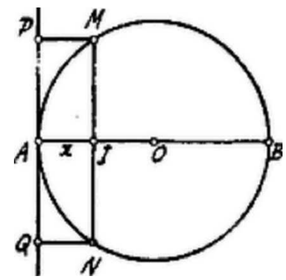
A kör szilárd AB átmérőjének és a változó MN húr metszéspontja legyen I, tehát $AI = x$. Minthogy az $AMB\sphericalangle$ derékszög, az $AMB\,\Delta$ átfogójára, AB-re bocsátott magasság MI, nyilván áll:

$$\overline{MI}^2 = AI \cdot IB = x(2R - x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < 2R.$$



A téglalap kerülete $2k = 2AI + 4MI$, tehát

(1) $$k = x + 2\sqrt{x(2R - x)}\ldots$$

Ezen összefüggésből következik, hogy $x < k$ tartozik lenni. Hogy az 1) egyenletet racionális alakra hozzuk:

(2) $$(k - x)^2 = 4x(2R - x), \quad \text{ill.} \quad f(x) \equiv 5x^2 - 2(k + 4R)x + k^2 = 0\ldots$$

Innen

$$x = \frac{k + 4R \pm \sqrt{(k + 4R)^2 - 5k^2}}{5}$$

A gyökök valósak, ha $(k + 4R)^2 - 5k^2 \geq 0$ ill. $k + 4R \geq k\sqrt{5}$
vagy

$$k \leq \frac{4R}{\sqrt{5} - 1} = R(\sqrt{5} + 1).$$

Ha a gyökök valósak, akkor pozitívek is, mert szorzatuk és összegük is pozitív. Amint láttuk, az első követelmény, hogy 0 és $2R$ között legyenek. Ennek megfelelnek, mert

$$x(2R - x) = \frac{(k - x)^2}{4} > 0$$

Meg kell vizsgálnunk, mikor van kielégítve az $x < k$ feltétel? Ezen célból vegyük figyelembe $f(k)$ és $f(0)$ előjelét

$$f(k) = 4k(k - 2R), \quad f(0) = k^2 > 0.$$

Ha $k < 2R$, akkor $f(k) < 0$. Ezen esetben a 2) egyenlet egyik gyöke van 0 és k között, tehát egy megoldás van. Ha $k > 2R$, akkor $f(k) > 0$. Minthogy most a gyökök összegének fele

$$\frac{k + 4R}{5} < \frac{k + 2k}{5} < k,$$

mindakét gyök 0 és k között van; tehát mindakét gyök megfelel, hacsak

$$2R < k < R(\sqrt{5} + 1)$$

$k = 0$ esetében csak $x = 0$ felel meg. Az I pont A-ba esik.
$k = 2R$ „ $x_2 = \dfrac{2R}{5}$, $x_1 = 2R$. Utóbbi esetben I a B-be kerül. Ha

$$k = R(\sqrt{5} + 1), \quad \text{akkor} \quad x_1 = x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}R.$$

Mandl Béla (Zrínyi Miklós rg. VII. o. Bp. VIII.)