Az egyjegyű számok: $1, \ldots 9$; ezek száma $9 = 9 \cdot 10^0$.
A kétjegyű számok: $10, \ldots 99$; ezek száma $99 - 9 = 90 = 9 \cdot 10^1$.
A háromjegyű számok: $100, \ldots 999$; ezek száma $999 - 99 = 900 = 9 \cdot 10^2$.
Az n jegyű számok: $10^{n-1}, \ldots 99, \ldots \overbrace{9}^{n}$; ezek száma $9 \cdot 10^{n-1}$. [1]

Ezen számok felírásához szükséges számjegyek száma

$$S = 1 \cdot 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 9 \cdot 10^2 + \ldots + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} = \\ = 9(1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + n \cdot 10^{n-1}).$$

A zárójelben álló összeg az

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

kifejezés értéke, ha $x = 10$. Azonban

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{d}{dx}(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \\ = \frac{\big[(n+1)x^n - 1\big](x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Ha most $x = 10$, akkor

$$S = 9\frac{n \cdot 10^{n+1} - (n+1)10^n + 1}{9^2} = \frac{10n \cdot 10^n - (n+1)10^n + 1}{9} = \\ = \frac{1}{9}\big[(9n-1)10^n + 1\big].$$

Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre rg. VII. o. Bp.).

A feladatot úgy is fel lehetett fogni, hogy 10^n jegyeinek számát is hozzászámítjuk az S összeghez. Többen ilyen értelemben oldották meg.

[1] Az $1, 2, \ldots, 9$ jegy mindegyikéhez hozzáfűzhetjük az $0, 1, 2, \ldots, 9$, azaz 10 elem $(n-1)$-ed oszt. ismétléses variációit.