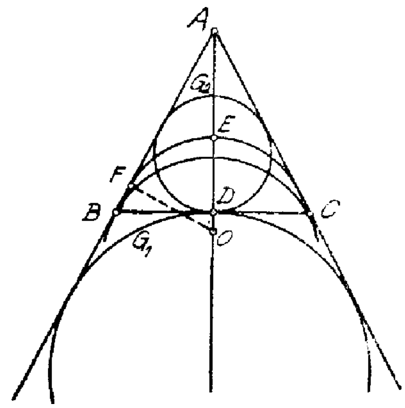
Vizsgálnunk kell azon gömböket, melyeknek középpontja a kúp tengelyén fekszik és a kúp palástját, helyesebben az adatok által meghatározott kúpfelületet (a testen kívül is) érintik.



Ezen gömbök, helyzetre és nagyságra nézve, két határ között változnak. Az egyik határgömb a kúpfelületet és a kúp alapját kívülről érintő gömb, G_1. A szóbanforgó gömbszelet magassága $x = 0$, térfogata $y = 0$. A másik határgömb a kúpba beírt gömb, G_2. A gömbszelet ekkor az egész gömb, magassága a G_2 átmérője: $x = 2\varrho_2$, térfogata $y = \frac{4\varrho_2^3\pi}{3}$.

E két határ közé eső tetszőleges G gömb sugara legyen ϱ, középpontja O, a kúpon belül eső gömbszelet magassága $x = DE$ és a köbtartalma

$$y = \frac{x^2\pi}{3}(3\varrho - x).$$

Már most ϱ-t is, mint x függvényét fejezzük ki. Ábránk szerint

$$AFO\Delta \sim ABD\Delta \quad \text{és így}$$
$$OF : AO = BD : AB.$$

Itt

$$OF = \varrho, \quad BD = r = 8;$$
$$AB = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$
$$AO = AD + DO = m + (EO - ED) = m + \varrho - x = 15 + \varrho - x.$$

Eszerint

$$\varrho : (15 + \varrho - x) = 8 : 17 \quad \text{ill.} \quad \varrho : (15 - x) = 8 : 9$$

és így

$$\varrho = \frac{8(15 - x)}{9}.$$

Ha $x = 0$, $\varrho_1 = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$ a G_1 gömb sugara.

Ha $x = 2\varrho_2$, akkor $\varrho_2 = \frac{120}{125} = \frac{24}{5} = 4{,}8$. Ez a G_2 gömb sugara. Tehát x értéke változik a $0 \leq x \leq 9{,}6$ intervallumban és itt kell vizsgálnunk az

$$y = \frac{x^2\pi}{3}\left(\frac{120 - 8x}{3} - x\right) = \frac{\pi}{9}(-11x^3 + 120x^2)$$

függvény változását. Képezzük első differenciálhányadosát:

$$y' = \frac{\pi}{9}(-33x^2 + 240x) = \frac{\pi}{3}x(-11x + 80)$$

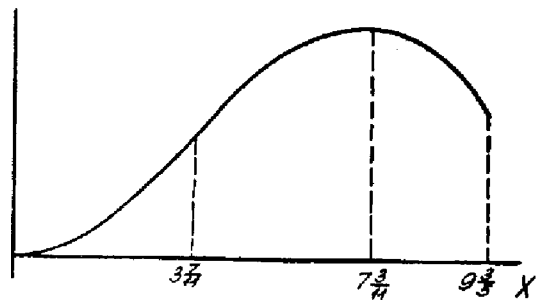
$y' = 0$, ha $x = 0$. A függvénygörbét itt az X-tengely érinti.[1]

$y' > 0$, ha $0 < x < \frac{80}{11}$ és $y' < 0$, ha $x > \frac{80}{11}$. Ez annyit jelent, hogy a függvény, azaz a gömbszelet köbtartalma növekedik, amíg x növekedik 0-tól $\frac{80}{11}$-ig, azután csökken, miközben x növekedik $\frac{80}{11}$-től $\frac{48}{5} = 9{,}6$-ig. Ha $x = \frac{80}{11}$, akkor a függvénynek maximuma van.

[1] A görbének alsó tetőpontja! Az alsó- és felső tetőpont közötti tengelymenti távolságot az inflexiós pont felezi, az $x = \frac{40}{11}$ helyen.

A függvény nehány nevezetesebb értékét feltüntető táblázat:

x	0		$\frac{40}{11}$	$\frac{24}{5}$		$\frac{80}{11}$		$\frac{48}{5}$
y	0	$\nearrow$	$117{,}55\pi$	$185{,}1\pi$	$\nearrow$	$235{,}1\pi$	$\searrow$	$147{,}5\pi$



Frankl Ottó (Izr. rg. VIII. o. Bp.).

NB. A gömbszelet félgömb, ha $x = \varrho = \frac{120}{17}$.

Ezen érték közel van az $x = \frac{80}{11}$-hez, ennél valamivel kisebb, tehát a gömbszelet maximuma esetén valamivel nagyobb egy félgömbnél.

Jegyzet. Ha csak azokat a gömböket vizsgáljuk, amelyek az elhatárolt kúp palástját, a *kúptesten belül* érintik, akkor a nagyobbik határgömb sugara a B pontban AB-re merőleges. Ennek nagysága $\varrho = \frac{136}{15}$. Ebben az esetben a ϱ értéke $\frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$-től csökken $\varrho_2 = \frac{24}{5} = 4{,}8$-ig, míg x növekedik $\frac{72}{15} = 4{,}8$-től $\frac{48}{5} = 9{,}6$-ig. A gömbszelet köbtartalma ezen közben először növekedik $185{,}1\pi$-től a már megadott maximumig, azután csökken.

Az 1291. feladat megoldását a következő számban hozzuk.