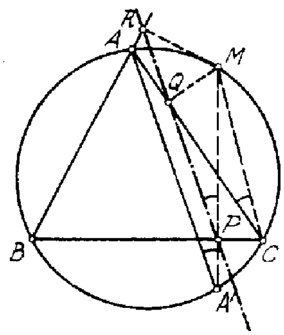
I. Megoldás. Az $ABC\Delta$ köré írt kör valamely M pontjából állítsunk merőlegeseket a háromszög oldalaira; ha ezeknek talppontjai P, Q, R, akkor ezek egy egyenesen, az M ponthoz tartozó Simson-egyenesen feküsznek.

Ha már most egy ilyen egyenes irányra nézve van megadva, meg kell határoznunk az $ABC\Delta$ köré írt körön a megfelelő M pontot.

Az adott irányt jelölje AA'. Az A' pontból az A-val szembenfekvő BC oldalra állított merőleges a háromszög köré írt kört a keresett M pontban metszi.



$MA' \perp BC$ és BC-t a P pontban metszi. Legyen továbbá $MQ \perp AC$. Ekkor P és Q már meghatározzák az M ponthoz tartozó Simson-egyenest; csak azt kell kimutatnunk, hogy $PQ \parallel A'A$.

Az $MCPQ$ idom az MC átmérő fölött szerkesztett körben húrnégyszög, mert $MPC\sphericalangle = MQC\sphericalangle = 90°$. Ebből következik, hogy

$$MCQ\sphericalangle = MPQ\sphericalangle,$$

mint ugyanazon íven álló kerületi szögek.

Másrészt az $ABC\Delta$ köré írt körben egyenlő kerületi szögek $MCQ\sphericalangle \equiv MCA\sphericalangle$ és $MA'A\sphericalangle$.
Eszerint

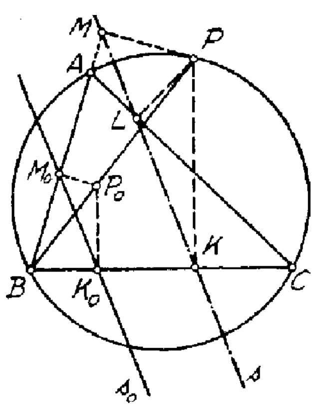
$$MPQ\sphericalangle = MA'A\sphericalangle \quad \text{és így} \quad PQ \parallel A'A. \qquad\qquad Q.\ e.\ d.$$

Czinczenheim József (Izr. rg. VIII. o. Debrecen).

Jegyzet. Önkényesnek tűnhetik fel, hogy a Simson-egyenes irányát olyannak vettük fel, hogy azzal A-ból párhuzamosat vonva, AA'-t, ez a $\widehat{BC}$ ívet B és C között metszi.

Ha AA' olyan irányú lenne, hogy A' a körön A és B, vagy A és C közé esnék, akkor a bizonyítás nem olyan egyszerű, mint a felvett esetben. Azonban az utóbb említett esetekben AA'-vel párhuzamost vonhatunk, vagy B-ből vagy C-ből és akkor ismét azon bizonyítási módot használhatjuk, amelyet láttunk.

II. Megoldás.



A megadott irányú s_0 egyesnek az $ABC\Delta$-nek BC ill AB oldalával való metszéspontja legyen K_0, ill. M_0. Ezen pontokban állítsunk merőlegest a háromszög illető oldalára; e két merőleges metszéspontja legyen P_0. Ha most a BP_0 egyenes bármely P pontjából merőlegest állítunk a BC, ill. AB oldalra – K, ill. M talpponttal – akkor

$$BK_0P_0\Delta \sim BKP\Delta \ \text{ s } \ BM_0P_0\Delta \sim BMP\Delta$$

Ezért

$$K_0P_0 : KP = BP_0 : BP$$

és

$$M_0P_0 : MP = BP_0 : BP$$

tehát

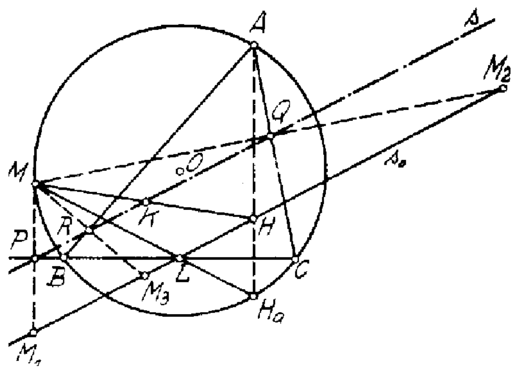
$$K_0P_0 : KP = M_0P_0 : MP.$$

Eszerint $K_0M_0P_0\Delta \sim KMP\Delta$ és ennek következtében $KM \equiv s \parallel K_0M_0 \equiv s_0$.

Ha P pont az $ABC\Delta$ köré írt körön fekszik, akkor s a P ponthoz tartozó Simson-egyenes és párhuzamos a megadott irányú s_0 egyenessel.

Komlós János (Gr. Széchenyi István gyakorló r. VII. o. Pécs).

III. Megoldás. Az $ABC\Delta$ köré írt kör tetszőleges pontja legyen M; az ehhez tartozó Simson-egyenes s, melyet meghatároznak az M pontnak a BC ill. AB oldalon levő vetületei, P ill. R. Az M pontnak a háromszög oldalaira vonatkozó szimmetrikus pontjai M_1, M_2, M_3 egy s_0 egyenesen feküsznek, amely párhuzamos az s egyenessel.



Legyen H az $ABC\Delta$ magassági pontja. Ismeretes,[1] hogy az M ponthoz tartozó Simson egyenes (s) felezi az MH távolságot (a K pontban). Ebből következik, hogy s_0 keresztülmegy a H ponton.

A H pontnak a háromszög oldalaira vonatkozó szimmetrikus pontjai a háromszög köré írt körön feküsznek; a H pontnak a BC oldalra vonatkozó szimmetrikus pontja legyen H_a. Az s_0 egyenesnek és a BC oldalnak L metszéspontját kössük össze az M, ill. H_a ponttal. Ekkor a HLH_a és MLM_1 egyenlőszárú háromszögekben a BC egyenes felezi az L csúcsnál fekvő szögeket;[2] kell tehát, hogy M, L, H_a egy egyenesen feküdjenek, azaz: az s_0 egyenesnek a BC-re vonatkozó szimmetrikusa keresztül megy az M ponton.[3]

Ezek alapján a szerkesztés a következő: az adott irányban a háromszög H magassági pontján keresztül húzzuk az s_0 egyenest; ennek a háromszög bármely oldalára vonatkozó szimmetrikusa, melyet a H pontnak az illető oldalra vonatkozó tükörképe határoz meg, a kört még azon M pontban metszi, amelyhez tartozó Simson-egyenes, $s \parallel s_0$.

Lóránd Endre (Br. Kemény Zsigmond r. VIII. o. Bp.)

---

[1] L. pl. Rátz L. Matematikai Gyakorlókönyv, II. r. 81. o. 561. feladat.

[2] BC egyenes közös szimmetriatengelye a két háromszögnek.

[3] Ugyanez áll az s_0 egyenesnek a többi oldalakra vonatkozó szimmetrikusaira is.